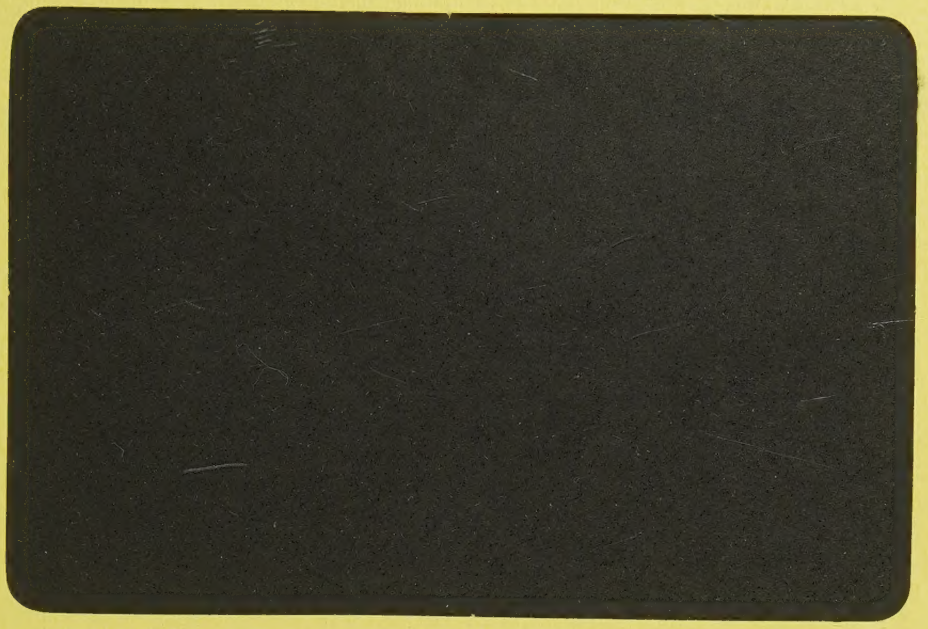
PARIJS

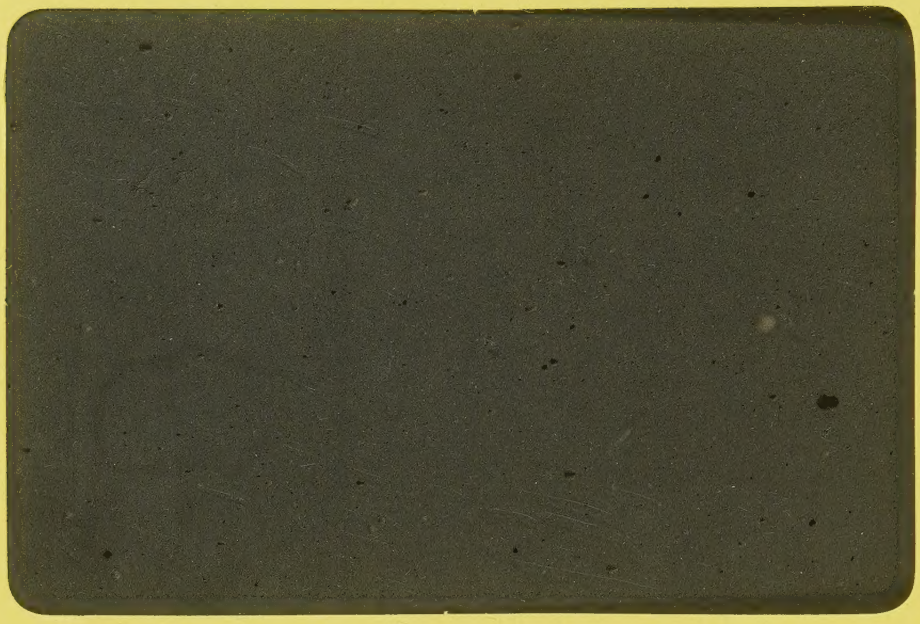
OBSERVATOIRE DE PARIS - MEUDON



J. Lecorat

DÉPARTEMENT D'ASTROPHYSIQUE FONDAMENTALE

1975



LA TURBULENCE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE HELICITAIRE

ET LA GENERATION DES CHAMPS MAGNETIQUES

A GRANDE ECHELLE

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE de PARIS VII

par

Jacques LEORAT

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

(Deuxième édition revue et corrigée en collaboration avec A. Pouquet et U. Frisch)

ENGLISH ABSTRACT NEXT PAGES

Soutenue le 26 mai 1975, devant la Commission d'Examen

MM.	E. SCHATZMAN	Président
	U. FRISCH	
	G. LAVAL	
	P. LENA	Examinateurs
	R. MOREAU	
	P. MOREL	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Comment formuler la préface d'une thèse lorsque son rédacteur désire autant exprimer sa reconnaissance à tous ceux qui l'ont aidés dans les différentes étapes de son travail que dénoncer cette cérémonie d'initiation individuelle à laquelle pourtant il croit devoir se soumettre ? Lorsque chacun pourra exercer son droit à la recherche, lorsqu'aura été abolie la division du travail, sans doute alors la Thèse aura disparu au milieu de bien d'autres institutions. Tout en espérant ces jours glorieux, je soumets cette thèse, rejoignant le camp des diplômés complices de la bureaucratisation et de la hiérarchisation de la société (Gorz, A. 1974). J'accepte aussi les avantages matériels que l'Université voudra bien m'accorder, puisqu'il semble que le salaire dépende essentiellement du diplôme.

Les résultats qui sont rapportés ici résultent d'un travail en commun avec Annick Pouquet et Uril Frisch. A. Pouquet a établi les équations spectrales, mis au point les techniques de calcul numérique et mis en évidence l'effet magnétique. Je suis reconnaissant à Uriel Frisch d'avoir donné les bases générales de ce travail et toujours contribué à la résolution des points de détail les plus épineux ; les très nombreuses discussions que nous avons eues ont été particulièrement stimulantes. Une bonne partie des résultats ont été obtenus au N.C.A.R. (Boulder, Colorado) qui, en diverses occasions, a généreusement fourni aide et hospitalité.

Evry Schatzman m'a accueilli dans son laboratoire et m'a aidé à m'orienter vers un domaine de recherche passionant.

L'aide de J.C. André a été très précieuse pour les calculs numériques et je remercie aussi A. Brissaud, M. Lesieur, A. Mazure et P.L. Sulem de leur amicale collaboration.

La majeure partie de ce travail a été dactylographiée par Myriam Marouard et je la remercie de son aide ainsi que Nadine Dreux.

Quant à Nicole, Thomas et Guillaume, sans doute est-ce ici aussi le lieu de leur redire que s'il y a une frustration dans mon travail de recherche, c'est de ne pouvoir en partager toutes les joies avec ceux que j'aime.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548117_0025

HELICAL MHD TURBULENCE AND THE GENERATION OF LARGE SCALE MAGNETIC FIELDS

ABSTRACT

To understand the turbulent generation of large scale magnetic fields in Astro and Geophysics and to overstep linear approaches of the dynamo effect such as introduced by Steenbeck, Krause and Rädler, we develop a new non linear theory of three dimensional homogeneous isotropic MHD turbulence with helicity, i.e. not statistically invariant under plane reflections. For this, we generalize techniques developed for ordinary turbulence in recent years by Kraichnan, Orszag and Others, in particular the quasi-normal eddy damped approximation. We obtain closed equations for the evolution of kinetic and magnetic energy and helicity which are studied both theoretically and numerically.

We find that interactions between widely separated scales are much more important than for ordinary turbulence. In the absence of helicity we show the existence of a $k^{-3/2}$ energy inertial range with kinetic and magnetic energy equipartition in agreement with Kraichnan's prediction. When kinetic helicity is continuously injected an inverse cascade of magnetic helicity is obtained leading to the appearance of magnetic energy and helicity in ever increasing scales (in fact, limited by the size of the system). This cascade results from a competition between the destabilization of large-scale magnetic fields by the small-scale "residual" helicity ($\equiv$ kinetic minus magnetic) and the destruction of residual helicity under the action of Alfvén waves due to the large-scale magnetic fields.

By frequent recalls we have tried to make this work accessible to non specialists in turbulence.

An extended Abstract in English may be found in the next pages.

EXTENDED ABSTRACT

The works of Steenbeck, Krause, Rädler (1966) and of Moffatt (1970 a, 1970 b) indicate that helicity plays an important role in the formation of large scale magnetic fields. To achieve a reasonable understanding of the growth and the possible saturation of these fields, it is clearly necessary to use the complete non linear MHD equations.

Kinetic helicity, $H_V = \int \underset{\sim}{v} \cdot \operatorname{curl} \underset{\sim}{v}\, d^2r$, is an invariant of the equations of a perfect incompressible fluid with no magnetic field ($\underset{\sim}{v}$ = velocity field). In the presence of magnetic fields, the kinetic helicity invariant is replaced by the magnetic helicity invariant, $H_M = \int \underset{\sim}{a} \cdot \operatorname{curl} \underset{\sim}{a}\, d^3r$ ($\underset{\sim}{a}$ = vector potential of the magnetic field) and the cross helicity invariant, $H_C = \int \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{b}\, d^3r$ ($\underset{\sim}{b}$ = magnetic field). Investigation of the absolute equilibrium (Frisch et al. 1975) has led to conjecture the possibility of an inverse cascade of magnetic helicity to small wave-numbers.

The homogeneous isotropic helical MHD turbulence problem has been investigated using the eddy damped quasi normal approximation (Orszag, 1970). This approximation is among the best available : it possesses a stochastic model which ensures realizability, it predicts a -5/3 power law inertial range (non magnetic case) and is closely related to Kraichnan's Test Field Model which is known to be in very good agreement with direct numerical simulations (Orszag & Patterson, 1971 ; Herring & Kraichnan, 1971). The eddy damping rate of Orszag had to be generalized to include triple correlation damping by Alfvén waves. Using this approach, a set of four coupled integrodifferential equations has been obtained for the kinetic and magnetic helicity spectra $H_V(k)$ and $H_M(k)$. The cross helicity spectrum (corresponding to the invariant $H_C = \int \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{b}\, d^3r$ has been taken identically zero because if it is taken zero initially, it remains zero and we are mainly interested if the generation of magnetic fields starting from an infinitesimal seed field.

In the magnetic non helical case, our equations are essentially the same as Nagarajan's (1970). A $k^{-3/2}$ inertial range is obtained in agreement with Kraichnan's conjecture (Kraichnan, 1965). In this inertial range, the transfer proceeds locally, kinetic and magnetic energies are in equipartition.

In the magnetic helical case, we have first considered the case when magnetic helicity is injected into the energy range. An inverse cascade of magnetic helicity is generated which carries magnetic helicity, magnetic energy and appreciable amounts of kinetic energy and helicity to ever larger scales. The total magnetic helicity grows linearly with time, total magnetic energy seems to grow only logarithmically and may possibly saturate.

In this inverse cascade, magnetic energy and helicity follow approximately a k^{-1} and k^{-2} law. The mechanism of the inverse cascade is the following : the residual helicity in the energy range, say $k \sim k_E$, due to magnetic helicity injection produces a growth by α -effect of both magnetic energy and helicity in smaller wave numbers, say $k \sim k_E/2$. The increasing magnetic energy near k_E and the magnetic helicity near $k_E/2$ destabilizes smaller wave numbers, say $k \sim k_E/4$.

The situation here described, a competition between the α effect and the Alfvén effect leading to an indefinite cascade, is quite different from that envisaged by several authors (Moffatt, 1970 a ; 1970 b ; Vainshtein & Zeldovich, 1972), who were looking for a non linear saturation mechanism which would halt the growth of the magnetic field. Two remarks are here in order. Firstly, Moffatt (1970 b) has already noticed that non dissipative Alfvén waves reduce the α effect by reducing the mean electric field $\langle \underset{\sim}{E} \rangle = -\langle \underset{\sim}{v} \wedge \underset{\sim}{b} \rangle$. Secondly, in the situation described, wave-numbers which have the largest growth rate are those contiguous to the region of available residual helicity, so that we do not have any preferred wave-numbers (contrary to Moffatt, 1970 b).

Non local effects involving triads of wave-vectors $\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{q}$ ($\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q}$) with $k \ll p \sim q$ or $q \ll k \sim p$ are found to be extremely important in magnetic turbulence. The dominant effects are :

(i) the Alfvén effect : relaxation to zero of the residual energy $E_R(k) = E_V(k) - E_M(k)$ and residual helicity $H_R(k) = H_V(k) - k^2 H_M(k)$ in a time of the order of the period of Alfvén waves produced by large scale magnetic fields.

(ii) the kinetic and magnetic α effect : it is found that small scale helicity destabilizes large scale magnetic energy and helicity. However, it is not the kinetic helicity alone which acts, as in the Steebeck-Krause-Rädler theory, but the residual helicity.

The expression for the transport coefficient α reduces to the one given by Moffatt (1970 a) only when most of the helicity is confined to the dissipation range ; otherwise, it is essentially independant of the magnetic diffusivity and depends on the local eddy turn-over time in the helical region. Higher order effects have also been evaluated ; it is found, e.g. that small scale magnetic energy increases the kinetic eddy diffusivity but has no influence on the magnetic eddy diffusivity.

The question of possible energy and helicity cascades and their direction has been considered both theoretically and numerically.

In the helical non magnetic case, it has already been established that kinetic helicity cascades along with kinetic energy to large wave numbers (Brissaud et al, 1973 ; Lesieur, 1973 ; André & Lesieur, 1975). In agreement with Kraichnan's prediction based on the study of absolute equilibrium (Kraichnan, 1973), no inverse transfer to small wave numbers was obtainde in this case.

The inverse cascade will proceed until either the injection stops or the largest scale available in the medium (e.g. a star or a planet) is attained.

In order to find if we have already obtained a turbulent dynamo, we have also considered the case where the magnetic energy is initially a very small fraction of the kinetic energy and only kinetic energy and helicity are injected. The total magnetic energy reaches values comparable to the total kinetic energy in a time of the order of the large eddy turn over time. An inverse cascade of magnetic helicity similar to the one described above takes then place. This may seen paradoxical since the magnetic helicity is initially zero, the total magnetic helicity is conserved by non linear interactions and no magnetic helicity is injected. The explanation is that kinetic helicity generates a magnetic helicity spectrum (e.g. by Alfvén effect) which at first integrates to zero ; however, dissipation will remove magnetic helicity from large wave-numbers and thus permits a net transfer to small wave-numbers.

RESUME

En vue de comprendre la génération turbulente des champs magnétiques à grande échelle en Astro-et Géophysique et de dépasser les approches linéaires de l'effet dynamo du type Steenbeck, Krause & Rädler, on développe une nouvelle théorie non linéaire de la turbulence MHD tridimensionnelle, homogène et isotrope présentant de l'hélicité, c'est-à-dire non statistiquement invariante par symétrie plane. On généralise pour cela des techniques développées par Kraichnan, Orszag et d'autres pour la turbulence ordinaire, en particulier l'approximation quasi-normale à amortissement turbulent. On aboutit ainsi à des équations fermées pour l'évolution des spectres d'énergie et d'hélicité cinétique et magnétique qui feront l'objet d'une étude théorique et numérique.

On montre que les interactions entre des échelles très différentes sont beacoup plus importantes qu'en turbulence ordinaire. En l'absence d'hélicité, on montre l'existence d'une zone inertielle en $k^{-3/2}$ avec équipartition d'énergie cinétique et magnétique conformément à la prédiction de Kraichnan. Lorsqu'on injecte continuement de l'hélicité cinétique il se produit une cascade inverse d'hélicité magnétique avec apparition d'énergie et d'hélicité magnétiques dans des échelles de plus en plus grandes (en fait limitées par des dimensions du système). Cette cascade résulte d'une compétition entre d'une part la déstabilisation des champs magnétiques à grande échelle par l'hélicité résiduelle (≡ cinétique moins magnétique) des petites échelles et d'autre part la destruction de l'hélicité résiduelle sous l'action des ondes d'Alfvén dues aux champs magnétiques à grande échelle.

De nombreux rappels sont destinés à rendre ce travail accessible aux non spécialistes de la turbulence.

SOMMAIRE

Helical MHD turbulence and the generation of large scale magnetic fields (abstract and extented abstract)

Résumé

Notations 1

Introduction - Résumé 4

CHAPITRE I - L'EFFET DYNAMO EN ASTROPHYSIQUE

I.1 Introduction 9
I.2 Dynamos galactiques 11
I.3 Dynamos stellaires 13
I.4 Dynamos planétaires 15
I.5 Conclusion 17

CHAPITRE II - PROPRIETES FONDAMENTALES DES EQUATIONS DE LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

2.1 Les équations de la MHD 18
2.2 Remarques sur les hélicités 22
2.3 Ondes d'Alfvén 23
2.4 Les équations dans l'espace de Fourier. Les relations de conservation détaillées 24
2.5 Les spectres de la turbulence MHD homogène, isotrope, hélicitaire 26
2.6 Tourbillons et cascades en turbulence MHD (Phénoménologie) 29
2.7 Mécanique statistique de la turbulence MHD tronquée (cas du fluide parfait) 34

CHAPITRE III - RAPPELS SUR L'APPROXIMATION QUASI NORMALE MARKOVIENNE A AMORTISSEMENT TURBULENT

3.1 Introduction 38
3.2 Amortissement turbulent et Markovianisation 40
3.3 Expression du taux d'amortissement turbulent 43
3.4 Les équations spectrales dans l'approximation de l'amortissement turbulent 46
3.5 Les équations spectrales de la turbulence homogène, isotrope, non magnétique et non hélicitaire 49
3.6 Propriétés des équations spectrales 51
3.7 Zone inertielle et cascade d'énergie 53

CHAPITRE IV - LA TURBULENCE MHD HOMOGENE, ISOTROPE, HELICITAIRE

4.1 Aperçu bibliographique 56
4.2. Le taux d'amortissement turbulent (rôle de l'effet Alfvén) 58
4.3 Les équations spectrales de la turbulence MHD homogène, isotrope, hélicitaire 60
4.4 Effets non locaux 66
4.4.1 Les équations non locales 66
4.4.2. Effet Alfvén 68
4.4.3 Effet α cinétique et magnétique et interprétation phénoménologique 70
4.4.4 Diffusivités cinétique et magnétique 73
4.4.5 Equations non locales et lois de conservation 74
4.4.6 Sur l'expression des coefficients α 75

4.5 Intégration numérique des équations spectrales 77

4.6 La zone inertielle en $k^{-3/2}$ de la turbulence MHD sans hélicité 81

4.7 La cascade inverse d'hélicité magnétique 83

4.8 La dynamo turbulente 87

4.9 Conclusion. Développements envisagés 90

Figures 93

Appendices

A1 **Turbulence expérimentale et modèles théoriques : quelques points de comparaison** 102

A2 Compléments sur les équations spectrales. Les coefficients géométriques; relations et développements utiles pour l'étude des effets non locaux 103

A3 "Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence". Phys. Fluids, 16, 1366 (1973) 108

Compléments sur l'hélicité 110

A4 "Catastrophe énergétique et nature de la turbulence". Ann. Geophys., 29, 539 (1973) 118

Compléments sur les catastrophes 125

A5 "Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity". J. Fluid. Mech., 68, 769 (1975) 130

Références 140

NOTATIONS

Symboles	Signification
$\vec{a}$	potentiel vecteur du champ magnétique divisé par $\sqrt{\mu\rho}$ (§ 2.1)
$\vec{b}$	champ magnétique divisé par $\sqrt{\mu\rho}$ (μ = perméabilité du fluide) (ρ = densité) (§ 2.1)
b_o	dispersion du champ magnétique
b_{kpq}	coefficient géométrique (voir Appendice A2)
c_{kpq}	" " "
d_{kpq}	" " "
e_{kpq}	" " "
f_{kpq}	" " "
$\vec{f}$	force extérieure par unité de masse (§ 2.1)
$\vec{j}$	densité de courant ($\vec{j} = \nabla \wedge b$) multiplié par $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$
$\vec{k}$, k	vecteur d'onde, module du vecteur d'onde, appelé aussi nombre d'onde
k_E	nombre d'onde caractéristique de la zone d'injection d'énergie (§ 3.2)
ℓ	échelle caractéristique d'un tourbillon (§ 2.6)
$\vec{p}$	vecteur d'onde
p	pression ou nombre d'onde
$\vec{q}$	vecteur d'onde
$\vec{r}$	rayon vecteur
s , t	temps
t*	temps de catastrophe (§ 3.6, voir aussi Appendice A4)
$\vec{v}$	champ de vitesse (§ 2.1)
v_ℓ	vitesse caractéristique d'un tourbillon d'échelle ℓ (! 2.6)
x, y, z	$x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$, où α , β , γ , sont les angles opposés à k, p, q dans le triangle $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$ (§ 3.5, voir aussi Appendice A2).
$\vec{z}^+$, $\vec{z}^-$	$\vec{z}^+ = \vec{v} + \vec{b}$, $\vec{z}^- = \vec{v} - \vec{b}$ (§ 2.3)

Symboles	Signification
A	paramètre de développement pour les interactions non locales (§ 4.41)
$\vec{B}$	champ magnétique uniforme ou à grande échelle (§ 2.3)
C_S , C_A	constantes ajustables apparaissant dans l'approximation EDQNM (équ 3.20 et 4.12)
C_K	constante de Kolmogorov (équ 2.53)
C_V, C_M, $\tilde{C}_M$	constantes pour les spectres d'énergie cinétique, magnétique et d'hélicité magnétique dans la zone inertielle MHD (§ 2.6)
D^V	enstrophie cinétique (équ 2.7)
$<E^V>$, $<E^M>$	$<E^V> = \frac{1}{2}<v^2>$, $<E^M> = \frac{1}{2}<b^2>$ (équ 2.39)
E_k^V, E_k^M, E_k^T, E_k^R	densités spectrales d'énergie cinétique, magnétique, totale, résiduelle (équs 2.43-46)
F_k^V, F_k^M, $\tilde{F}_k^V$, $\tilde{F}_k^M$	densités spectrales du taux d'injection d'énergie cinétique, magnétique et d'hélicité cinétique, magnétique (équs. 4.27-30)
$<H^V>$, $<H^M>$, $<H^C>$	$<H^V> = \frac{1}{2}<\vec{v}.\nabla\wedge\vec{v}>$, $<H^M> = \frac{1}{2}<\vec{a}.\nabla\wedge\vec{a}>$, $<H^C> = \frac{1}{2}<\vec{v}.\vec{b}>$ (équ 2.46)
H_k^V, H_k^M, H_k^R	densités spectrales d'hélicité cinétique, magnétique résiduelle (équs 2.44-46)
$\vec{J}$	densité de courant uniforme ou à grande échelle multiplié par $\sqrt{\mu/\rho}$ (équ 4.108)
$\mathscr{L}$, L^a_{bc}	opérateur bilinéaire et son tenseur (équ 3.21)
L^V_{VV} , L^V_{VM} , ...	opérateurs bilinéaires (équs 4.13-14)
$P_{\ell mn}(\vec{k})$	$P_{\ell mn}(\vec{k}) = k_m P_{\ell n}(k) + k_n P_{\ell m}(k)$ (§ 2.4)
$P_{\ell n}(\vec{k})$	$P_{\ell n}(\vec{k}) = \delta_{\ell n} - k_\ell k_n/k^2$ (§ 2.4) opérateur de projection sur le plan perpendiculaire à $\vec{k}$.
P_{rm}	nombre de Prandtl magnétique $P_{rm} = \nu/\lambda$
R_e , R_m	Nombre de Reynolds cinétique, magnétique
T^V_{VV} , T^V_{VM} , etc...	facteurs dans les équations spectrales (équs 4.27-30)
$T_{k;p,q}$, T_k	termes de transfert non linéaire $T_k = \int_{\Delta k} dpdq \; T_{k;p,q}$ (equs. 3.38)
U_k^V, ..., $\tilde{U}_k^C$	cf. équs 2.40-42
X^a	"composante" du vecteur X (équ 3.21)

Symboles	Signification
α, β, γ	angles opposés à k, p, q dans le triangle $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$ (§ 3.5, voir aussi Appendice A2)
$\alpha_k^V, \alpha_k^M, \alpha_k^R$	coefficients α cinétique, magnétique, résiduel (équs 4.65-67)
δ_{ij}	symbole de Kronecker
ε_{ijk}	tenseur antisymétrique fondamental
ε^V , ε^M	taux d'injection d'énergie cinétique, magnétique (§ 2.6)
$\tilde{\varepsilon}^V$, $\tilde{\varepsilon}^M$	taux d'injection d'hélicité cinétique, magnétique (§ 2.6)
θ_{kpq}	temps de mémoire de la triade $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$ (équ. 3.11)
λ	diffusivité magnétique (§ 2.1)
μ	perméabilité magnétique du fluide (§ 2.1)
$\mu_k^A, \mu_k^S, \mu_k^D$	taux d'amortissement turbulent par effet Alfvén, par autodistorsion, par dissipation (viscosité et effet Joule) (équ. 4.10, équs. 3.18-19, équs. 3.17 et 4.12)
μ_{kpq}	taux de relaxation des corrélations triples (§ 3.2)
ν_k^V, ν_k^M	diffusivité turbulente cinétique, magnétique (équs. 4.68-69)
ν^+ , ν^-	$\nu^+ = \nu + \lambda$, $\nu^- = \nu - \lambda$ (§ 2.3)
ρ	densité du fluide (§ 2.1)
τ	temps (§ 3.2)
τ_o	temps de mémoire dans le MRCM (§ 3.6)
τ_ℓ	durée de vie d'un tourbillon d'échelle ℓ (§ 2.6)
Γ_k , $\tilde{\Gamma}_k$	coefficients Γ d'effet Alfvén, d'effet Alfvén hélicitaire (équ. 4.59)
$\Delta_{\ell mn}(k)$	$\Delta_{\ell mn}(k) = k_m \delta_{\ell n} - k_n \delta_{\ell m}$ (équ 4.24)
Π_k^+ , Π_k^-	flux direct, flux inverse (équs. 3.41)
Π_k^T , $\tilde{\Pi}_k^M$	flux d'énergie totale, flux d'hélicité magnétique
$\langle \circ \rangle$, $\langle \circ \rangle_\infty$	valeur moyenne (probaliste), (§ 2.5)
$\int_{\Delta_k} dpdq$	intégrale dans le domaine $\lvert k-p \rvert \leq q \leq k+p$
$\sim$	proportionnel
$\simeq$	peu différent
$\approx$	de l'ordre de

INTRODUCTION - RESUME

La présence de champs magnétiques est une caractéristique importante de nombreux corps célestes : le champ magnétique terrestre a été détecté par les anciens chinois, tandis que récemment des champs magnétiques environ un million de fois plus intenses ont été observés dans des naines blanches.

Parmi les divers mécanismes qui ont été proposés pour expliquer la génération de tels champs, le plus plausible est "l'effet dynamo", c'est-à-dire la génération et l'entretien des champs par leur interaction avec des champs de vitesse dans un milieu conducteur dont la dynamique est régie par les équations de la magnétohydrodynamique (MHD). Comme les mouvements laminaires sont exceptionnels dans les situations géophysiques ou astrophysiques, il est nécessaire d'étudier le problème de la génération de champs magnétiques dans un champ de vitesse turbulent. Si l'on suppose un champ magnétique initial très faible dans une turbulence cinétique entretenue (par des forces extérieures ou tout autre mécanisme) deux problèmes principaux sont à distinguer :

(i) Le champ de vitesse turbulent va d'abord accroître l'énergie magnétique par cisaillement des lignes de champ magnétique (phénomène linéaire décrit par l'équation d'advection du champ magnétique) jusqu'à ce que cette croissance soit limitée par la réaction de force de Lorentz (phénomène non linéaire) : quel sera le niveau final atteint par l'énergie magnétique ?

(ii) Les champs magnétiques rencontrés dans beaucoup de situations astrophysiques sont caractérisés par une cohérence sur des échelles plus grandes que celles de la turbulence : y a-t-il un mécanisme conduisant à l'apparition d'énergie magnétique à grande échelle en milieu turbulent ?

Une des clés de ce deuxième problème semble être la non-invariance par symétrie plane de la turbulence, propriété caractérisée par l'hélicité. On rappelle que l'hélicité cinétique d'un écoulement s'écrit :

$$H^V = \tfrac{1}{2} \int \vec{v} \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) d^3r \quad (\vec{v} = \text{champ de vitesse})$$

On définit de même l'hélicité magnétique :

$$H^M = \tfrac{1}{2} \int \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) d^3r \quad (\vec{a} = \text{potentiel vecteur du champ magnétique}).$$

L'hélicité magnétique est un invariant des équations de la MHD en l'absence de dissipation ou de forces extérieures. On sait depuis les travaux de Steenbeck, Krause & Rädler (1966) et de Moffatt (1970 a) que la présence d'hélicité cinétique à petite échelle déstabilise les champs magnétiques à grande échelle. Une étude complète des effets non linéaires en turbulence MHD homogène et isotrope doit donc prendre en compte les hélicités cinétique et magnétique.

Le premier chapitre expose les motivations d'ordre astrophysique de l'étude de la turbulence MHD aux grands nombres de Reynolds cinétique et magnétique en rappelant certaines des conditions physiques du fonctionnement des différentes dynamos que l'on doit envisager : dynamos planétaires, stellaires et galactiques.

La turbulence MHD est abordée au deuxième chapitre avec un rappel sur les propriétés structurelles des équations de la MHD (invariances, conservations), les ondes d'Alfvén et la phénoménologie des tourbillons et cascades conduisant à des résultats fondés sur des raisonnements dimensionnels. On montre ensuite comment des méthodes de mécanique statistique peuvent s'appliquer aux équations de la MHD tronquées dans le cas d'un fluide parfait (on ne garde qu'un nombre fini de modes de Fourier et on supprime toute dissipation) et permettent d'obtenir des "ensembles d'équilibre absolu" présentant une forte excitation magnétique dans les grandes échelles lorsque l'hélicité magnétique, un invariant du système, est

non nulle. Cette technique peu connue, due à Lee (1952) et développée par Kraichnan (1973), nous a permis de prédire l'existence d'une cascade inverse d'hélicité magnétique, confirmée ensuite par le présent travail.

Avant d'envisager une théorie de la turbulence MHD, il est nécessaire d'avoir une théorie quantitative de la turbulence non magnétique. Un progrès important dans ce domaine a été fait en turbulence homogène, isotrope, non magnétique grâce au Modèle du Champ d'Epreuve (Test Field Model = TFM) de Kraichnan (1971 a) et à l'approximation quasi normale markovienne à amortissement turbulent d'Orszag (1970). C'est cette dernière méthode qui est présentée au troisième chapitre, car elle est relativement simple à exposer et donne de bons résultats : elle possède un modèle probabiliste qui assure la positivité du spectre d'énergie, elle prédit un spectre en $k^{-5/3}$ dans la zone d'inertie et elle est très proche du TFM qui est en excellent accord avec les simulations numériques directes des équations de Navier Stokes. Après l'introduction du taux d'amortissement turbulent, les équations spectrales sont établies dans le cas homogène, isotrope, non magnétique, non hélicitaire et leurs propriétés principales sont rappelées.

Dans le quatrième chapitre (qui pourra être abordé directement par le lecteur familier des théories actuelles de la turbulence), l'approximation de l'amortissement turbulent est étendue au cas magnétique en incluant, en particulier, la contribution des ondes d'Alfvén à l'amortissement turbulent. Un ensemble de quatre équations couplées intégrodifférentielles est obtenu pour les spectres d'énergie cinétique E_k^V et magnétique E_k^M et les spectres d'hélicité cinétique H_k^V et magnétique H_k^M. Les effets non locaux concernant l'interaction de triades de vecteurs d'ondes $\vec{k}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ ($\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$) telles que $k \ll p \simeq q$ ou $q \ll k \simeq p$ ou $p \ll k \simeq q$ sont étudiés ensuite et se révèlent être très importants en turbulence MHD. Les effets dominants sont :

(i) l'effet Alfvén : l'énergie résiduelle

$$E_k^R = E_k^V - E_k^M$$

et l'hélicité résiduelle :

$$H_k^R = H_k^V - k^2 H_k^M$$

relaxent vers zéro en un temps de l'ordre de la période des ondes d'Alfvèn produites par les champs magnétiques à plus grande échelle.

(ii) l'effet α cinétique et magnétique : on montre que l'hélicité à petite échelle déstabilise l'énergie et l'hélicité magnétiques à grande échelle. Néanmoins, ce n'est pas l'hélicité cinétique seule qui agit comme dans la théorie linéaire de Steenbeck, Krause & Rädler (1966), mais l'hélicité résiduelle H_k^R. L'expression du coefficient α cinétique se réduit à celle donnée par Moffatt (1970 a) uniquement lorsque l'hélicité est confinée dans le domaine de dissipation.

(iii) Certains effets d'ordre supérieur sont aussi évalués. On donne l'expression des diffusivités turbulentes magnétiques et cinétiques et on montre que l'énergie magnétique à petite échelle contribue à la diffusivité turbulente pour les quantités cinétiques (énergie et hélicité) mais pas à la diffusivité turbulente pour les quantités magnétiques.

Le problème des cascades d'énergie et d'hélicité est ensuite abordé à la fois théoriquement et numériquement.

Dans le cas d'une turbulence magnétique entretenue et sans hélicité, on obtient une cascade directe d'énergie cinétique et magnétique avec un domaine d'inertie en $k^{-3/2}$; le transfert est local (comme en turbulence tridimensionnelle non magnétique) et les énergies cinétique et magnétique sont en équipartition. Ces résultats sont en accord avec la théorie phénoménologique de Kraichnan (1965).

On passe ensuite à la turbulence MHD hélicitaire en commençant par le cas où de l'hélicité magnétique est injectée en plus de l'énergie magnétique (injection dans le domaine d'énergie). Une cascade inverse d'hélicité magnétique est engendrée qui transporte de l'hélicité magnétique, de l'énergie magnétique et une quantité appréciable d'énergie cinétique vers des échelles de plus en plus grandes. Dans cette cascade inverse, l'énergie magnétique suit approximativement une loi en k^{-1} et l'hélicité magnétique une loi en k^{-2}. Le mécanisme de cette cascade inverse est le suivant : l'hélicité résiduelle dans le domaine d'énergie ($k \simeq k_E$) due à l'injection de l'hélicité magnétique produit une croissance par effet α de l'énergie et l'hélicité magnétiques dans les nombres d'ondes plus petits (par exemple, $k \simeq k_E/2$). La croissance de l'énergie magnétique vers $k_E/2$ tend à réduire par effet Alfvén l'hélicité résiduelle vers k_E tandis que l'hélicité magnétique vers $k_E/2$ déstabilise des plus petits nombres d'ondes (par exemple, $k \simeq k_E/4$), et ainsi de suite. La situation ainsi décrite, une compétition entre l'effet α et l'effet Alfvén donnant lieu à une cascade indéfinie est bien différente de celle envisagée par d'autres auteurs (Moffatt 1970 a, 1970 b ; Vainshtein & Zeldovich, 1972) qui cherchaient un mécanisme non linéaire de saturation pour limiter la croissance du champ magnétique.

Pour obtenir une véritable dynamo turbulente, on étudie le cas où sont injectées seulement de l'énergie et de l'hélicité cinétiques avec une énergie magnétique initiale très petite et pas d'hélicité magnétique. Tout d'abord l'énergie magnétique totale atteint une valeur comparable à l'énergie cinétique totale en un temps de l'ordre du temps caractéristique des tourbillons de la zone d'énergie ("large eddy turn-over time"). Ensuite se produit une cascade inverse d'hélicité magnétique telle que celle décrite ci-dessus. Ce résultat peut paraître paradoxal puisque l'hélicité magnétique initiale est nulle, l'hélicité magnétique totale est conservée par les interactions non linéaires et qu'il n'y a pas d'hélicité magnétique injectée. En fait l'hélicité cinétique engendre, par effet

Alfvén, un spectre d'hélicité magnétique dont l'intégrale est d'abord nulle ; mais la dissipation va détruire de l'hélicité magnétique dans les grands nombres d'ondes et permet donc un transfert d'hélicité magnétique vers les petits nombres d'ondes. L'attention particulière portée à l'effet dynamo dans le cadre de la théorie non linéaire présentée est due surtout à l'intérêt des applications astrophysiques pour lesquelles les nombres de Reynolds cinétiques et magnétiques sont très élevés et l'injection d'hélicité cinétique peut avoir lieu sous l'effet de l'accélération de Coriolis. L'étude des effets de la viscosité et de la conductivité constitue un autre champ d'applications possibles très intéressantes de la théorie.

Trois articles sont reproduits en Appendice. "Catastrophe énergétique et nature de la turbulence" est complété par l'étude d'un modèle d'équation locale présentant la propriété de "catastrophe" au bout d'un temps fini et "Helicity cascades in fully developped isotropic turbulence " est accompagné de remarques concernant l'hélicité et la possibilité d'injection d'hélicité en présence de l'accélération de Coriolis. Une expérience de mesure d'hélicité, en cours de réalisation, est aussi décrite.

1. L'EFFET DYNAMO EN ASTROPHYSIQUE

1.1 Introduction

Depuis le début du siècle s'accumulent les observations montrant la présence de champs magnétiques importants dans des objets aussi différents par leurs conditions physiques que les galaxies, les étoiles et les planètes. Le maintien de champs organisés dans un milieu en état de turbulence semble difficile à expliquer car "l'ordre ne naît pas du chaos" (Cowling). Avant de proposer une théorie concernant l'origine de ces champs au chapitre 4, il semble important de passer en revue quelques cas différents afin d'avoir une évaluation des paramètres du milieu (conductivité, viscosité) et des niveaux atteints par les champs de vitesse et les champs magnétiques ainsi que leurs échelles spatiales respectives. En effet, l'évolution de ces champs dépend essentiellement de trois phénomènes agissant conjointement :

(i) La diffusion par effet Joule du champ magnétique dans un milieu de conductivité finie.

(ii) L'effet d'induction des champs de vitesse sur les champs magnétiques (Loi d'Ohm).

(iii) La réaction du champ magnétique sur le champ de vitesse due à la force de Laplace-Lorentz, à comparer avec les autres forces agissantes.

Nous avons tenté de rassembler dans les paragraphes qui suivent des données observationnelles qui peuvent être importantes pour la résolution du problème de la génération des champs magnétiques en éliminant celles qui concernent les très nombreuses et très importantes conséquences de la présence de ces champs (les problèmes de moment angulaire pour la formation des étoiles, pour ne citer qu'un exemple, Mestel 1965). Comme la génération du champ est due à l'effet d'induction d'un champ de vitesse, on appellera ce phénomène "effet dynamo".

1.2 Dynamos galactiques.

Les radiosources extragalactiques témoignent de l'existence dans celles-ci d'un champ magnétique intense qui doit être à grande échelle puisque le rayonnement synchrotron observé est souvent polarisé (Kellerman, 1974).

Un champ magnétique à grande échelle a pu être observé dans des galaxies du groupe local, les nuages de Magellan (Mathewson & Ford, 1970) et M 51 (Mathewson et al, 1972). Il est difficile d'obtenir une estimation du champ magnétique car le milieu observé est hétérogène et on obtient des effets intégrés le long de la ligne de visée, mais différentes méthodes permettent de conclure à l'existence d'un champ magnétique à grande échelle d'environ 2 μGauss, associé au bras spiral où se trouve le Soleil (Gardner & Davies, 1965 ; Mitton, 1972 ; Michel & Yahil, 1973 ; Manchester, 1974). Les fluctuations du champ sont du même ordre de grandeur que le champ lui-même et leur échelle spatiale est de l'ordre de 150 parsec (Jokipii et al, 1969). La pression magnétique, la pression du gaz de rayons cosmiques et la pression gazeuse du milieu interstellaire sont toutes du même ordre de grandeur.

Le milieu interstellaire dans lequel est plongé le champ magnétique est un gaz constitué principalement d'hydrogène. Les mesures radioélectriques utilisant la raie à 21 cm de l'hydrogène neutre, ont montré qu'au niveau du Soleil, l'échelle de hauteur de l'hydrogène neutre était environ 350 parsecs et la largeur des bras spiraux était d'environ 400 parsecs. Autour des étoiles chaudes, l'hydrogène est ionisé par le continuum de Lyman mais le reste du milieu interstellaire est formé de nuages froids ($T \simeq 50°K$), relativement denses ($n_H \simeq 14$ atomes/cm^3), de dimensions environ 3.5 parsecs (masse $\simeq 50\ M_\odot$) occupant environ 5% de l'espace (de l'ordre de 10 nuages sur une ligne de visée de 1 Kpc) en équilibre de pression avec un milieu raréfié à une température voisine de $T \simeq 5000°K$ (Kaplan et Pikelner, 1970 ; Verschuur & Kellermann, 1974). On observe des vitesses caractéristiques de l'ordre de 2 km/s (Burton, 1972) si bien que les écoulements sont supersoniques (à T = 50°K, la vitesse du son est environ 0,6 km/s). La viscosité du milieu est environ $\nu = 3.10^{18}$ cm^2/s: si bien que le "nombre de Reynolds" du milieu est de l'ordre de 10^5.

La conductivité est modifiée par le champ magnétique si la fréquence de collision est inférieure à la fréquence gyromagnétique : la diffusivité magnétique passe alors d'une valeur d'environ 10^{10} cm^2/s à 10^{23} cm^2/s ($n_e \simeq 10^{-2}$ électrons/cm^3). Dans ce dernier cas, le temps de diffusion du champ est de l'ordre de grandeur de la durée de vie du nuage. Les incertitudes sur toutes ces grandeurs caractéristiques sont encores assez grandes pour que les théories de la dynamo galactique (Parker, 1969, 1971) restent en concurrence avec les théories de l'origine "fossile" du champ (Piddington, 1972, 1973).

1.3 Dynamos stellaires.

Il n'y a qu'une centaine d'étoiles, principalement du type spectral A, dont le champ magnétique ait pu être observé (Preston, 1967). Nous mettons à part les pulsars dont le champ magnétique d'environ 10^{10} - 10^{12} Gauss peut provenir de la contraction gravitationnelle d'une étoile de champ moyen de l'ordre du Gauss (Pacini, 1968). Des champs de l'ordre de un million de Gauss ont été trouvés récemment dans quelques naines blanches (Angel et al, 1974), mais pour les étoiles de type A, le champ le plus intense observé est de 34 kG (Balcock, 1960) tandis que le champ minimal observable doit être d'une centaine de Gauss en valeur moyenne sur le disque observé, ce qui introduit une sélection importante dans les observations. En relation avec les théories de l'effet dynamo, nous remarquons ici que les théories de l'évolution stellaire accordent aux étoiles de type spectral A une zone convective d'hydrogène en surface et que l'on observe une décroissance importante dans les vitesses angulaires de rotation stellaire à partir du type F : aux observations de champs magnétiques intenses dans les étoiles de type A, correspond donc une vitesse de rotation élevée associée à la présence d'une zone convective de surface. Signalons aussi que Schatzman (1962) a montré que les champs magnétiques stellaires pouvaient être responsables de la perte de moment angulaire observée après le type A. Les naines blanches ont aussi une zone convective en surface ; la seule naine blanche magnétique qui soit aussi périodique a une période de rotation de 1,3 jour.

C'est dans les taches solaires que le premier champ magnétique stellaire a été mesuré par Hale en 1908. En dehors des taches ("régions actives") où le champ peut atteindre 3000 Gauss, valeur bien supérieure à l'équipartition des énergies cinétiques et magnétiques (environ 100 Gauss pour $\rho = 10^{-7} g/cm^3$, $v = 1$ Km/s), les champs magnétiques sont difficiles à détecter dans les régions

non actives. Ce sont en fait des flux moyens qui sont mesurés et les champs moyens dépendent de la résolution. Le champ solaire moyen sur un hémisphère est de l'ordre de 1 Gauss tandis que des champs d'environ 1000 Gauss ont été observés aux frontières des supergranules. Les observations ne permettent pas encore de décider s'il existe ou non un champ magnétique à petite échelle (Harvey, 1971 ; Chapman, 1974). Cette question peut se reposer à propos du champ de vitesse. Le Soleil a une zone convective d'hydrogène de surface mais est en équilibre radiatif dans la photosphère en deçà d'une épaisseur optique de 0.7 environ (Moore, 1967). Le champ de vitesse observé dans les granules (0.5 km/s - 2 km/s) avec une échelle d'environ 700 km est trop proche de la limite de résolution ($\sim$ 300 km) pour pouvoir détecter directement ses composantes à petite échelle, si elles existent. L'élargissement anormal des raies photosphériques peut être interprété comme dû à un champ de vitesse turbulent à petite échelle (Auvergne et al, 1973 ; Frisch, 1975) mais cette interprétation n'est pas unanimement acceptée (Worral & Wilson; 1972)

Une théorie phénoménologique présentant un point de vue diamétralement opposé à l'idée d'un effet dynamo turbulent a été proposée par H.W. Babcock (1961) : pour expliquer le cycle magnétique solaire de période 22 ans, au lieu de partir des champs à petite échelle, Babcock montre la possibilité de l'amplification d'un champ toroïdal à grande échelle par la rotation différentielle solaire et son éruption sous forme de groupes bipolaires. Cette théorie a l'avantage de pouvoir être présentée à l'aide de quelques schémas très suggestifs, mais elle reste phénoménologique. La théorie de la dynamo turbulente aura par contre à résister aux observations à haute résolution de la surface solaire envisageables prochainement à partir d'expériences spatiales.

1.4 Dynamos planétaires.

Les explorations spatiales ont permis très récemment de faire des progrès considérables dans la connaissance des champs magnétiques planétaires, mais, à partir de mesures le long d'une courbe trajectoire, il n'est pas possible de déterminer si leur origine est interne à la planète survolée, ou externe (interaction de la planète avec le vent solaire, par exemple) et on obtient donc seulement un moment magnétique dipolaire effectif. Mercure et Mars ont un moment magnétique effectif de l'ordre de dix millième de celui de la Terre ; le moment de Vénus est encore plus faible ; la Lune a un champ magnétique très hétérogène qui semble dû à des sources locales possédant une aimantation rémanente (peut-être acquise dans un champ de quelques centièmes de Gauss au cours du refroidissement des roches, entre 3 et 3.8 milliards d'années ; Runcorn, 1975). Par contre, des singaux à des fréquences radioélectriques ont été reçus de Saturne, indiquant la présence d'un champ magnétique notable et Jupiter est la seule planète dont le moment magnétique, estimé à 4 R_J^3 (Gauss cm^3) (Mac Donough, 1974) est comparable à celui de la Terre qui est de 0.4 R_T^3 (R_J est le rayon de Jupiter, R_T celui de la Terre). Il correspond à un dipôle incliné d'environ 15° par rapport à l'axe de rotation de Jupiter, déplacé de 0.2 R_J par rapport au centre et a une polarité opposée à celle de la Terre.

Les planètes ayant un moment magnétique peu élevé sont celles qui ont une vitesse angulaire de rotation très faible (Mercure, Vénus, Lune) et/ou dont le noyau liquide, s'il existe, est peu important (Mercure, Lune, Mars). Saturne et Jupiter sont des planètes à vitesse angulaire de rotation élevée (jour d'environ 10h). Le flux de chaleur émis par Jupiter est environ trois fois plus important que le flux solaire incident et une zone convective de surface est prédite par les théories de la structure interne de Jupiter. Il est difficile d'en dire plus à l'heure actuelle, mais signalons aussi la possibilité que les régions centrales de Jupiter ($R/R_J < 0.4$) soient liquides et convectives (Smoluchowski, 1967). D'autres théories donnent un noyau d'hydrogène métallique (Hubbard & Smoluchowski, 1973).

C'est évidemment le champ magnétique terrestre qui est le mieux connu des champs planétaires, à la fois spatialement puisque, depuis Gauss, on sait distinguer ses composantes internes des composantes externes dues aux courants ionosphériques, et temporellement puisque les variations de déclinaison et d'inclinaison ont été notées depuis le 17e siècle et que les études paléomagnétiques donnent des informations de plus en plus précises sur les temps historiques ou géologiques. Si l'on considère d'abord les variations spatiales du champ, un développement en harmoniques sphériques montre qu'au niveau de l'interface noyau-manteau, le champ n'est que très approximativement représentable par un dipôle. Mais ce sont ses variations temporelles qui sont les plus intéressantes du point de vue de la théorie de l'effet dynamo. La variation séculaire actuelle se décompose en variation du champ dipolaire (décroissance de 0.05% par an du moment dipolaire depuis environ 2000 ans, rotation vers l'ouest du moment de 0.05° par an, décroissance de l'angle du moment avec l'axe de rotation de 0.02° par an) et variation du champ non dipôle (dérive vers l'ouest de 0.2° par an et variations non régulières de 0.1% par an). On sait aussi que la polarité du champ s'est inversée plusieurs fois au cours des temps géologiques. On distingue les "époques" de polarité (actuelle ou inverse) qui ont des durées de l'ordre du million d'années, des "événements" qui correspondent à des renversements de courte durée (de l'ordre de 10 000 ans ou inférieur) ou à des excursions des pôles hors de la zone commune qui est centrée sur les pôles géographiques. Notre époque géomagnétique (époque de Brunhes) a débuté il y a environ 750 000 ans et le dernier événement non ambigu est celui de Laschamp qui a eu lieu il y a environ 12 000 ans et a été de courte durée (Noël & Tarling, 1975). Le temps de dissipation ohmique du champ est d'environ 15 000 ans si l'on prend une conductivité de 5.10^5 $(\Omega.m)^{-1}$ (diffusivité magnétique de l'ordre de 1) pour le noyau liquide de 3 500 km de rayon environ (le temps de dissipation pour le manteau seul est d'environ 3 ans ; les variations

géomagnétiques de période inférieure à trois ans sont donc effacées par "l'effet de peau" du manteau). Le champ de vitesse dans le noyau, nécessaire pour l'entretien du champ (puissance nécessaire : 10^{11} W environ), peut être dû à la convection thermique, à la séparation gravitationnelle des éléments dans le noyau ou à la précession (Malkus, 1968). Nous nous contenterons de remarquer qu'avec une viscosité cinématique du noyau d'environ 0.026 cm^2/s (Verhoogen, 1974) et une échelle de longueur de 10 km représentant la hauteur d'ondulations du manteau en contact avec le noyau (Hide, 1969), on obtient un nombre de Reynolds de 400 000 en prenant pour vitesse relative manteau noyau la vitesse de dérive vers l'ouest de la composante non dipôle, 10^{-4} m/s (mais cette vitesse n'est pas nécessairement une vitesse hydrodynamique : Acheson & Hide, 1973).

1.5 Conclusion.

Bien que les valeurs numériques proposées puissent être mises en doute, il semble établi que des champs magnétiques à grande échelle subsistent en présence d'un champ de vitesse de type turbulent dans un fluide conducteur en rotation. La connaissance des champs de vitesse à l'oeuvre est encore trop fragmentaire pour pouvoir tirer des observations des renseignements plus quantitatifs sur le fonctionnement réel des dynamos homogènes en Astrophysique.

2. PROPRIETES FONDAMENTALES DES EQUATIONS DE LA MHD

2.1. Les équations de la MHD.

L'interaction d'un champ magnétique et d'un fluide conducteur (noyau fluide de planète, plasma stellaire ou galactique) peut être décrite dans le cadre de l'approximation de la magnétohydrodynamique (MHD), fondée sur les hypothèses suivantes :

(i) le champ de vitesse obéit aux équations de Navier-Stokes avec force de Laplace-Lorentz ;

(ii) le champ magnétique obéit aux équations "pré-Maxwelliennes" ; le courant de déplacement étant négligé ;

(iii) le courant est relié aux champs électromagnétiques par la loi d'Ohm.

Ces hypothèses sont assez bien vérifiées dans les conditions où se pose le problème de la génération des champs magnétiques observables ; l'introduction de la compressibilité du milieu, du courant de déplacement ou du courant de Hall par exemple, n'est, à l'heure actuelle, qu'un raffinement discutable, alors que les phénomènes résultant des seules hypothèses énoncées ci-dessus sont loin d'être complètement élucidés. Si l'on se limite donc à ces hypothèses, les équations de la MHD sont constituées de six équations couplées dépendant de deux paramètres (Roberts, 1967)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = - \nabla p + \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{b} = \vec{b} \cdot \nabla \vec{v} + \lambda \nabla^2 \vec{b} + \vec{g}, \qquad (2.2)$$

avec les conditions $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{b} = 0 \qquad (2.3)$

qu'il suffit d'ailleurs d'imposer à l'instant initial.

$\vec{v}(\vec{r},t)$ et $\sqrt{\mu\rho}\,\vec{b}(\vec{r},t)$ sont le champ de vitesse et le champ magnétique, μ est la perméabilité magnétique du fluide, ρ la densité du milieu (on prendra $\rho = 1$), ν la viscosité cinématique, λ la diffusivité magnétique, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ représentent les forces extérieures agissant sur le fluide pour entretenir la turbulence et ρp est la pression qui peut d'ailleurs s'exprimer en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{b}$ à l'aide de la relation d'incompressibilité (3) en résolvant une équation de Poisson. Les phénomènes que nous voulons mettre en évidance ne font jouer aucun rôle particulier aux frontières du fluide et nous supposerons en général le milieu infini.

Avant de considérer les propriétés de ces équations qui sont importantes du point de vue du physicien, il n'est pas inutile de rappeler ici quelques uns des résultats mathématiques que l'on possède sur les équations sans champ magnétique (équation de Navier-Stokes à trois dimensions).

a) L'existence, l'unicité et la régularité des solutions sont vérifiées pendant un temps fini, dépendant des conditions initiales, mais pas de la viscosité (Kato, 1971).

b) L'existence, l'unicité et la régularité des solutions pour tout temps n'a été démontrée que lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment petit.

c) Si la dissipativité α (le terme de dissipation $\nu \nabla^2 \vec{v}$ ayant été remplacé par $-\nu(-\nabla^2)^{\alpha}$) est supérieure à 5/4, l'existence, l'unicité et la régularité des solutions est assurée pour tout temps et toute viscosité positive (Lions, 1969).

d) L'existence de "solutions turbulentes", c'est-à-dire de solutions qui au bout d'un temps fini deviennent dissipatives à la limite de viscosité nulle est une conjecture qui a pu être vérifiée sur un modèle stochastique (MRCM) des équations de Navier-Stokes (Brissaud et al, 1973 en Appendice A4 ; Penel, 1975).

Il est très vraisemblable que les propriétés a - d sont aussi vérifiées dans le cas MHD.

On sait que les théories actuelles de la turbulence, à défaut d'un fondement mathématique déductif, s'appuyent fortement sur les propriétés structurelles des équations. Dans le cas des équations MHD sans forces extérieures, on a les propriétés d'invariance par translation (espace et temps) et rotation, et par transformation de Galilée ($\vec{r} \longrightarrow \vec{r}-\vec{U}t$, $t \longrightarrow t$, $\vec{v} \longrightarrow \vec{v}+\vec{U}$) valables quels que soient ν et λ, et d'autre part les propriétés de conservation à viscosité et diffusivité nulles. Pour cela on définit les quantités suivantes* (D dénote la dimension de l'espace) :

énergie cinétique :

$$E^V = \tfrac{1}{2} \int v^2 \, d^D r \qquad (2.4)$$

énergie magnétique :

$$E^M = \tfrac{1}{2} \int b^2 \, d^D r \qquad (2.5)$$

énergie totale :

$$E^T = E^V + E^M \qquad (2.6)$$

enstrophie cinétique :

$$D^V = \tfrac{1}{2} \int (\nabla \wedge \vec{v})^2 \, d^D r \qquad (2.7)$$

hélicité cinétique :

$$H^V = \tfrac{1}{2} \int \vec{v}. \, (\nabla \wedge \vec{v}) \, d^D r \qquad (2.8)$$

---

* On a supposé ici que le champ de vitesse et le champ magnétique tendent vers zéro à l'infini suffisamment rapidement pour que les intégrales existent. L'hélicité cinétique définie par la relation (8) diffère de celle donnée par Moffatt (1969) par le facteur ½ qui a été introduit ici par commodité (pour pouvoir être éliminé avec le facteur ½ des énergies au cours des calculs ultérieurs, par exemple dans les conditions de réalisabilité des spectres, cf. § 3.4).

hélicité magnétique :

$$H^M = \tfrac{1}{2} \int \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{a})\, d^D r \qquad (2.9)$$

où $\vec{a}$ est le potentiel vecteur du champ magnétique ($\vec{b} = \nabla \wedge \vec{a}$)

hélicité croisée :

$$H^C = \tfrac{1}{2} \int \vec{v} \cdot \vec{b}\, d^D r \qquad (2.10)$$

"énergie" du potentiel vecteur magnétique (en attendant un meilleur nom) :

$$F^M = \tfrac{1}{2} \int a^2\, d^D r \qquad (2.11)$$

Les propriétés de conservation des quantités définies ci-dessus s'établissent très aisément au moyen de la relation :

$$\int \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})\, d^3 r - \int \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\, d^3 r = \int \nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0 \qquad (2.12)$$

vérifiée pour tout champ de vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ décroissant à l'infini.

Suivant que l'on considère le cas magnétique ou non magnétique, à deux (2D) ou trois dimensions (3D), on obtient la conservation des différentes quantités données par le tableau suivant :

	2D	3D	équations utilisées
$b \equiv 0$	E^V	E^V	(1)
	D^V		(1)
	$(H^V \equiv 0)$	H^V	(1)
$b \equiv 0$	E^T	E^T	(1) + (2)
	H^C	H^C	(1) + (2)
	F^M		(2)
	$(H^M \equiv 0)$	H^M	(2)

(2.13)

2.2 Remarques sur les hélicités (cf. aussi l'Appendice A3).

Les hélicités cinétiques et magnétiques sont des pseudoscalaires ; l'hélicité croisée est aussi un pseudoscalaire puisque le champ magnétique est un vecteur axial (mais cette dernière propriété n'est pas une conséquence des seules équations de la MHD 1-3). On peut se représenter un écoulement hélicitaire au voisinage d'un point comme une famille de lignes de courant enroulées en hélice au voisinage de la ligne de courant passant par le point considéré (cf A3) Si un écoulement n'est pas globalement invariant par symétrie plane ou si une turbulence n'est pas statistiquement invariante par cette transformation, les hélices considérées ci-dessous ont un signe privilégié et l'hélicité totale est non nulle en général.

La considération de quantités hélicitaires est relativement récente et c'est dans le domaine de la MHD qu'elles sont apparues en premier. Elsässer (1956) et Woltjer (1958) ont montré respectivement que l'hélicité magnétique et l'hélicité croisée étaient conservées par les équations de la MHD. En hydrodynamique, Betchov (1961) signale la conservation de l'hélicité cinétique, mais c'est Moffatt (1969) qui étudie de façon détaillée les propriétés topologiques du champ de vitesse avec hélicité. Les effets de l'hélicité cinétique ont été étudiés par Lesieur (1973) et André & Lesieur (1975) qui ont montré que l'hélicité avait un rôle dynamique secondaire en turbulence non magnétique : essentiellement une certaine inhibition du transfert d'énergie lorsque l'hélicité est maximale. Nous montrerons par contre au chapitre 4 qu'en turbulence MHD les hélicités cinétiques et magnétiques produisent des effets importants (effet α, cascade inverse d'hélicité magnétique).

2.3 Ondes d'Alfvén.

Les équations de la MHD ont des solutions de type ondulatoire en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$: cette propriété a, comme on le verra au chapitre 4, des conséquences très importantes pour la dynamique de la turbulence. Les ondes d'Alfvén se mettent en évidence très simplement avec les nouvelles variables et paramètres :

$$\vec{z}^{+} = \vec{v} + \vec{b} \quad , \quad \vec{z}^{-} = \vec{v} - \vec{b}, \tag{2.14}$$

$$\nu^{+} = \tfrac{1}{2}(\nu + \lambda) \quad , \quad \nu^{-} = \tfrac{1}{2}(\nu - \lambda) \tag{2.15}$$

les équations de la MHD deviennent alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{z}^{+} + \vec{z}^{-}\cdot\nabla\vec{z}^{+} = -\vec{\nabla}p + \nu^{+}\nabla^{2}\vec{z}^{+} + \nu^{-}\nabla^{2}\vec{z}^{-}, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{z}^{-} + \vec{z}^{+}\cdot\nabla\vec{z}^{-} = -\vec{\nabla}p + \nu^{+}\nabla^{2}\vec{z}^{+} + \nu^{-}\nabla^{2}\vec{z}^{-}, \tag{2.17}$$

$$\nabla\cdot\vec{z}^{+} = 0 \quad , \quad \nabla\cdot\vec{z}^{-} = 0, \tag{2.18}$$

Si $\vec{B}$ est un champ uniforme tel que $\vec{z}^{+}$ et $\vec{z}^{-}$ soient petits par rapport à $\vec{B}$ ($v \ll B$ et $b \ll B$), on linéarise les équations (16) et (17) pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{z}^{+} = +(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{z}^{+} + \nu^{+}\nabla^{2}\vec{z}^{+} + \nu^{-}\nabla^{2}\vec{z}^{-}, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{z}^{-} = -(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{z}^{-} + \nu^{+}\nabla^{2}\vec{z}^{+} + \nu^{-}\nabla^{2}\vec{z}^{-}, \tag{2.20}$$

dont les solutions sont des ondes planes amorties se propageant à la vitesse de groupe $+\vec{B}$ pour les ondes $\vec{z}^{-}$ et $-\vec{B}$ pour les ondes $\vec{z}^{+}$ avec équipartition des énergies cinétiques et magnétiques. On obtient encore de telles solutions lorsque $\vec{B}$ n'est plus uniforme mais a une échelle de variation spatiale suffisamment grande ; c'est ainsi que les "tourbillons" magnétiques à grande échelle donnent lieu à des ondes d'Alfvén dans les petits tourbillons ce qui modifie considérablement la dynamique.

D'un point de vue structurel, le fait essentiel, comme l'a remarqué Kraichnan (1965), c'est qu'un champ magnétique à grande échelle ne peut pas être éliminé par un changement de référentiel contrairement à un champ de vitesse à grande échelle qui s'élimine par une transformation de Galilée.

2.4 Les équations dans l'espace de Fourier ; les relations de conservation détaillées.

Comme le milieu que l'on étudie est supposé infini et homogène, il est commode d'adopter une représentation en série de Fourier, en considérant l'écoulement comme périodique de maille cubique d'arête L puis en passant à la limite $L \longrightarrow \infty$. On obtiendrait évidemment les mêmes résultats en définissant la transformée de Fourier des fonctions aléatoires stationnaires que sont les champs de vitesse et le champ magnétique ; cette transformée de Fourier existe comme distribution aléatoire.

On obtient donc la représentation du champ de vitesse (le temps est implicite dans $\vec{v}(\vec{r})$ et $\vec{v}(\vec{k})$)

$$\vec{v}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \vec{v}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} , \qquad (2.21)$$

où les vecteurs d'ondes $\vec{k}$ sont définis par :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\,\vec{n} \quad (n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) , \qquad (2.22)$$

tandis que les composantes de Fourier sont données par :

$$\vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{L^3} \int \vec{v}(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r \qquad (2.23)$$

On peut ainsi écrire les équations de la MHD 1-3 sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) v_\ell(\vec{k}) = -\frac{i}{2} P_{\ell mn}(\vec{k}) \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \left(v_m(\vec{p})v_n(\vec{q}) - b_m(\vec{p})b_n(\vec{q})\right) + f_\ell(\vec{k}) , \qquad (2.24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda k^2\right) b_m(\vec{k}) = i k_j \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \left(v_m(\vec{p})b_j(\vec{q}) - v_j(\vec{p})b_m(\vec{q})\right) + g_m(\vec{k}) , \qquad (2.25)$$

$$\vec{k}\cdot\vec{v}(\vec{k}) = 0 \quad , \quad \vec{k}\cdot\vec{b}(\vec{k}) = 0 , \qquad (2.26)$$

où l'on a défini les opérateurs :

$$P_{\ell mn}(\vec{k}) = k_m P_{\ell n}(\vec{k}) + k_n P_{\ell m}(\vec{k}) \quad , \tag{2.27}$$

$$P_{\ell n}(\vec{k}) = \delta_{\ell n} - \frac{k_\ell k_n}{k^2} \quad , \tag{2.28}$$

$\delta_{\ell n}$ étant le symbole de Kronecker et $P_{\ell n}(\vec{k})$ est le tenseur de l'opérateur de projection sur le plan perpendiculaire à $\vec{k}$.

Ces équations possèdent évidemment les mêmes propriétés d'invariance et de conservation que les équations (1.3) mais elles vérifient en plus la propriété de conservation détaillée pour les équations "inviscides tronquées" : lorsque $\nu = \lambda = f = g = 0$, les quantités quadratiques (énergies et hélicités) sont aussi invariantes pour tout ensemble tronqué de modes, obtenu en supprimant tous les termes non linéaires pour lesquels au moins un des trois vecteurs d'ondes $\vec{k}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ n'appartient pas à un ensemble borné donné T, symétrique par rapport à l'origine (par exemple $|k| \leq K$). On définit alors les énergies et hélicités par mode en vertu des relations du type :

$$E^V = \tfrac{1}{2} L^3 \sum_{k \in T} \vec{v}(\vec{k}) . v(\vec{k}) \quad , \tag{2.29}$$

$$H^V = \frac{i}{2} L^3 \sum_{k \in T} \vec{k} . (\vec{v}(\vec{k}) \wedge \vec{v}(-\vec{k})) . \tag{2.30}$$

L'invariance des quantités habituelles dans le cas inviscide tronqué se démontre en partant des équations non tronquées et en supposant qu'à l'instant initial $\vec{v}(\vec{k})$ et $\vec{b}(\vec{k})$ soient nuls pour des vecteurs d'ondes k en dehors de l'ensemble tronqué T. On considère alors la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale (ou de tout autre invariant) qui est nulle et l'on remarque que bien que $\vec{v}(\vec{k})$ et $\vec{b}(\vec{k})$ ne restent pas nuls pour $k \notin T$, ils ne contribuent pas à la dérivée initiale de l'énergie totale, car celle-ci dépend quadratiquement de $\vec{v}(\vec{k})$ et $\vec{b}(\vec{k})$ (vérifier à partir de :

$$E^T = \frac{L^3}{2} \sum_{\vec{k}} (\vec{v}(k) . \vec{v}(-\vec{k}) + \vec{b}(k) . \vec{b}(-\vec{k})) \quad , \tag{2.31}$$

et en dérivant par rapport au temps). On voit donc que dE^T/dt à la même valeur, nulle, pour les équations tronquées et non tronquées. Ces propriétés

de conservation sont en particulier vérifiées pour trois modes en interaction ($\vec{k}$, $-\vec{k}$; $\vec{p}$, $-\vec{p}$; $\vec{q}$, $-\vec{q}$ tels que $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$) et c'est pourquoi l'on parle de conservation détaillée. Ces propriétés seront utilisées en particulier au § 2.7 pour établir l'existence d'ensembles d'équilibre statistique en turbulence avec un nombre fini de modes.

2.5 Les spectres de la turbulence MHD homogène, isotrope, hélicitaire.

Pour une turbulence homogène et isotrope les tenseurs de corrélation prennent une forme très simple. Les tenseurs du premier ordre $\langle \vec{v}(\vec{k}) \rangle$ et $\langle \vec{b}(\vec{k}) \rangle$ sont nuls en raison de l'isotropie et on sait que les tenseurs isotropes du second ordre $R_{ij}(\vec{k})$ ne dépendent que de trois fonctions scalaires de $k = |\vec{k}|$ (Lumley, 1970)

$$R_{ij}(\vec{k}) = A(k)\,\delta_{ij} + B(k)\,k_i k_j + \varepsilon_{ijf} k_f C(k) \quad , \qquad (2.32)$$

où ε_{ijf} est le tenseur fondamental antisymétrique d'ordre trois.
Si de plus le tenseur $R_{ij}(\vec{k})$ est à divergence nulle ($k_i\, R_{ij}(\vec{k}) = 0$) , alors

$$R_{ij}(\vec{k}) = A(k)\, P_{ij}(\vec{k}) + \varepsilon_{ijf} k_f C(k) \quad , \qquad (2.33)$$

où $P_{ij}(\vec{k})$ est donné par (2.28).

En turbulence homogène, les tenseurs de corrélation d'ordre deux ne dépendent que du vecteur $\vec{k}$ puisque

$$\langle v_i(\vec{k})\, v_j(\vec{k'}) \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \vec{k} + \vec{k'} \neq 0 \qquad (2.34)$$

On a d'autre part, d'après (23) :

$$\langle v_i(\vec{k})\, v_j(-\vec{k}) \rangle = \frac{1}{L^6} \iint \langle v_i(\vec{x}) v_j(\vec{x'}) \rangle\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x'})}\, d^3x\, d^3x' \quad , \qquad (2.35)$$

soit, en vertu de l'homogénéité

$$\langle v_i(\vec{k})\, v_j(\vec{-k})\rangle = \frac{1}{L^3}\int \langle v_i(0)\, v_j(\vec{r})\rangle\, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r \quad , \qquad (2.36)$$

et $L^3 \langle v_i(\vec{k})\, v_j(\vec{-k})\rangle$ tend vers une limite finie lorsque $L \longrightarrow \infty$ si le tenseur des corrélations spatiales a une transformée de Fourier. On a d'autre part :

$$\lim_{L\longrightarrow\infty} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}} = \int d^3k \qquad (2.37)$$

Nous noterons donc, par définition,

$$\langle v_i(\vec{k})\, v_j(\vec{-k})\rangle_\infty = \underset{L\longrightarrow\infty}{\text{limite}} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \langle v_i(\vec{k})\, v_j(\vec{-k})\rangle \quad , \qquad (2.38)$$

de façon que, par exemple, la densité moyenne d'énergie cinétique (cf. équation (29)),

$$\langle E^V\rangle = \underset{L\longrightarrow\infty}{\text{limite}} \sum_{\vec{k}} \tfrac{1}{2}\langle \vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{v}(\vec{-k})\rangle \ ,$$

s'écrive :

$$\langle E^V\rangle = \tfrac{1}{2}\int d^3k \,\langle \vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{v}(\vec{-k})\rangle_\infty \qquad (2.39)$$

En utilisant les relations (37) et (38) on obtient alors :

$$\langle v_i(k)\, v_j(-k)\rangle_\infty = \tfrac{1}{2} P_{ij}(\vec{k})\, U_k^V - \frac{i}{2}\, \varepsilon_{ijf}\, k_f\, \tilde{U}_k^V \quad , \qquad (2.40)$$

$$\langle b_i(k)\, b_j(-k)\rangle_\infty = \tfrac{1}{2} P_{ij}(\vec{k})\, U_k^M - \frac{i}{2}\, \varepsilon_{ijf}\, k_f\, \tilde{U}_k^M \quad , \qquad (2.41)$$

$$\langle v_i(k)\, b_j(-k)\rangle_\infty = \tfrac{1}{2} P_{ij}(\vec{k})\, \tilde{U}_k^C - \frac{i}{2}\, \varepsilon_{ijf}\, k_f\, U_k^C \quad , \qquad (2.42)$$

où U_k^V, U_k^M et U_k^C sont des fonctions scalaires de k et $\tilde{U}_k^V$, $\tilde{U}_k^M$, $\tilde{U}_k^C$ sont des fonctions pseudoscalaires de k qui sont nulles lorsque la turbulence est statistiquement invariante par réflection (les termes en $\mathcal{E}_{ijf}$ sont nuls dans la turbulence à deux dimensions).

On définit les spectres d'énergie cinétique et magnétique,

$$E_k^V = 2\pi k^2 U_k^V \quad , \quad E_k^M = 2\pi k^2 U_k^M \quad , \tag{2.43}$$

et les spectres d'hélicité cinétique, magnétique et croisée

$$H_k^V = 2\pi k^4 \tilde{U}_k^V \quad , \quad H_k^M = 2\pi k^2 \tilde{U}_k^M \quad , \quad H_k^C = 2\pi k^2 \tilde{U}_k^C \quad , \tag{2.44}$$

tels que

$$\langle E^V \rangle = \int_0^\infty E_k^V \, dk \quad , \quad \langle E^M \rangle = \int_0^\infty E_k^M \, dk \quad , \tag{2.45}$$

$$\langle H^V \rangle = \int_0^\infty H_k^V \, dk \quad , \quad \langle H^M \rangle = \int_0^\infty H_k^M \, dk \quad , \quad \langle H^C \rangle = \int_0^\infty H_k^C \, dk \quad . \tag{2.46}$$

Les tenseurs 40-42 sont définis positifs, ce qui entraîne la positivité des spectres d'énergie cinétique et magnétique :

$$E_k^V \geq 0 \quad , \quad E_k^M \geq 0 \tag{2.47}$$

et des inégalités du type Schwarz pour les spectres d'hélicité

$$\left| H_k^V \right| \leq k\, E_k^V \tag{2.48}$$

$$\left| H_k^M \right| \leq E_k^M / k \tag{2.49}$$

$$\left| H_k^C \right| \leq \sqrt{E_k^V\, E_k^M} \tag{2.50}$$

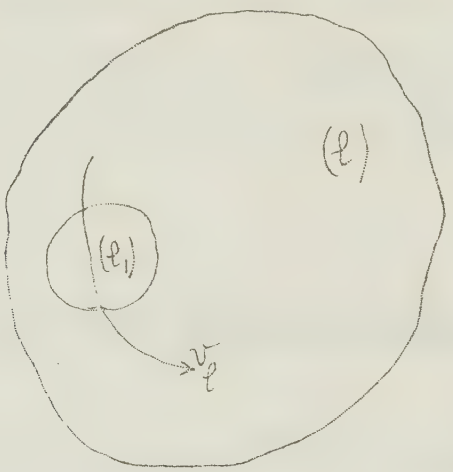
Nous dirons qu'une hélicité est maximale à un nombre d'onde k quand l'inégalité correspondante devient une égalité pour ce nombre d'onde ; l'état sera qualifié d'état d'hélicité maximale si cette égalité est réalisée pour tout k. Un tel état n'est pas conservé par les équations d'évolution (Kraichnan 1973). On vérifie que si l'hélicité magnétique (par exemple) est maximale en k, alors la densité de courant $\vec{j}(\vec{k})$ est presque sûrement parallèle au champ magnétique $\vec{b}(\vec{k})$ pour tout vecteur d'onde de module k. Ceci contribue à réduire la force de Laplace-Lorentz, sans toutefois l'annuler : pour cela il faudrait $\vec{j}(\vec{k}) = \lambda \vec{b}(\vec{k})$ avec λ indépendant de $\vec{k}$.

2.6 Tourbillons et cascades en turbulence MHD (Phénoménologie).

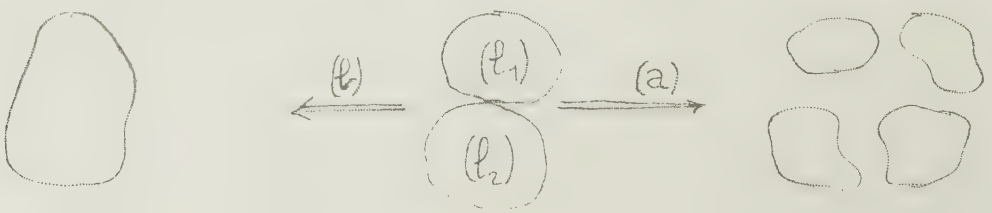
Dans les théories phénoménologiques la turbulence est un ensemble de "tourbillons" en interaction de différentes échelles caractéristiques ℓ et vitesses caractéristiques v_ℓ : un "tourbillon" n'est pas un objet spatialement bien défini (comme l'est un tourbillon à la surface de l'eau en aval d'un obstacle) mais c'est une représentation fondée sur l'association d'un vecteur d'onde de module k dans l'espace de Fourier à une échelle caractéristique $\ell \sim \frac{2\pi}{k}$ dans l'espace réel.

2.6.1 Tourbillons cinétiques et tourbillons magnétiques

Un tourbillon d'échelle ℓ au point O peut être imaginé comme constitué par la sphère de centre O de rayon ℓ. La vitesse prise en moyenne dans cette sphère est la vitesse d'entraînement du tourbillon par les tourbillons plus grands tandis que pour obtenir une vitesse caractéristique v_ℓ du tourbillon, on peut prendre l'écart quadratique de la vitesse dans le tourbillon par rapport à cette vitesse d'entraînement. Le tourbillon "tourne" donc en un temps de l'ordre de $\tau_\ell = \frac{\ell}{v_\ell}$ ("eddy turn-over time"). On peut définir une infinité de tourbillons en tout point de l'espace et de toutes les échelles. Si l'on considère deux tourbillons voisins d'échelles très différentes, par exemple $\ell_1 \ll \ell$, l'invariance galiléenne permet de conclure que l'inter ction de ces deux tourbillons se réduit pour l'essentiel à une advection du tourbillon d'échelle ℓ_1 par celui d'échelle ℓ à la vitesse v_ℓ définie ci-dessus.



Si par contre ℓ_1 et ℓ_2 sont du même ordre de grandeur, on obtient une interaction non triviale pouvant conduire à la création de nouveaux tourbillons de taille plus petite (cascade directe, cas (a)) ou plus grande (cascade inverse, cas (b)). En turbulence non magnétique, la cascade directe se produit dans les écoulement à trois dimensions tandis que la cascade inverse a lieu dans les écoulement bidimensionnels (voir, par exemple, Kraichnan, 1971b).

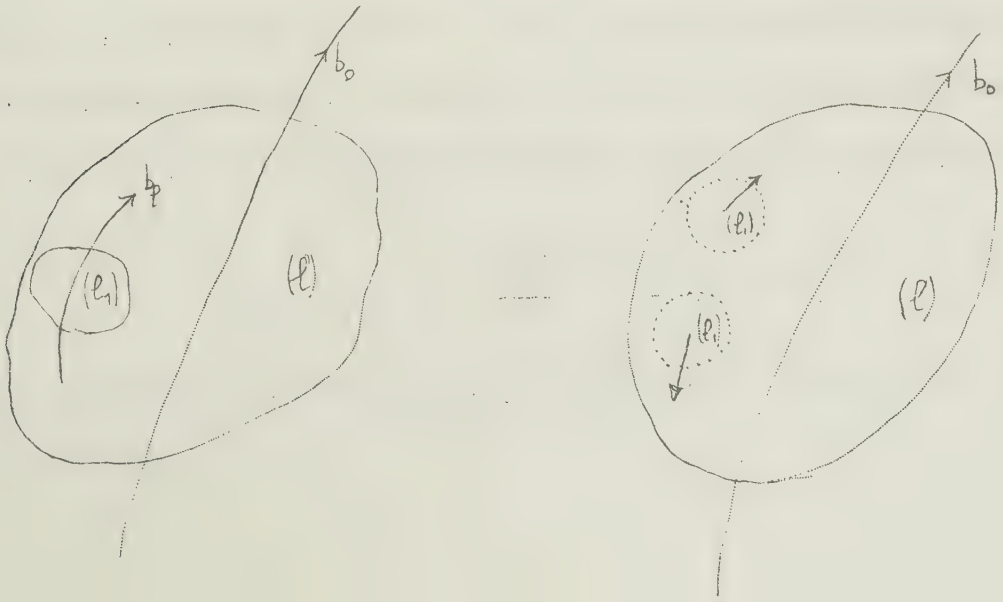


Le seul temps caractéristique que l'on puisse attribuer à ce processus d'interaction de deux tourbillons d'échelle ℓ et de vitesse caractéristique v_ℓ est encore

$$\tau_\ell = \frac{\ell}{v_\ell} \qquad (2.51)$$

Le temps de rotation du tourbillon défini plus haut est donc aussi un temps caractéristique de cisaillement. Cette coïncidence n'est que le résultat de l'application du théorème de l'âge du capitaine : En dehors de toute autre indication, l'âge du capitaine (τ_ℓ) ne peut être égal qu'à la hauteur du mât (ℓ) divisée par la vitesse du navire (v_ℓ)...Ce temps caractéristique est appelé temps local de Fermi lorsqu'il est exprimé à l'aide de quantités spectrales (cf. équ. 3.18).

Dans le cas de la turbulence MHD, on peut de même imaginer en O un "tourbillon magnétique" d'échelle ℓ. Il est plongé dans un champ magnétique moyen $\vec{b}_o$ et on définit un champ caractéristique b_ℓ comme étant l'écart quadratique par rapport à ce champ moyen. Mais, contrairement au cas hydrodynamique, un tourbillon d'échelle ℓ_1 situé dans le tourbillon ℓ et tel que $\ell_1 << \ell$ va être influencé directement par les tourbillons de plus grande échelle puisque des ondes d'Alfvén $\vec{z}^+$ et $\vec{z}^-$ (cf. § 2.3) vont se propager le long de $\vec{b}_o$ dans les deux sens.



Le temps caractéristique associé à ce processus est évidemment $\frac{\ell}{b_o}$ où b_o est la vitesse d'Alfvén, construite sur le champ à grande échelle.

2.6.2 Cascades d'énergie.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer par des arguments dimensionnels la forme du spectre d'énergie dans la zone inertielle qui correspond aux échelles gouvernées essentiellement par le transfert non linéaire (absence d'injection d'énergie ou de dissipation à ces échelles). En turbulence non magnétique, on suppose essentiellement qu'un tourbillon d'échelle ℓ, d'énergie $\frac{1}{2} v_\ell^2$ a une durée de vie $\tau_\ell = \frac{\ell}{v_\ell}$ et que son énergie est transférée à des échelles $\ell_1 < \ell$. Le taux de de transfert d'énergie cinétique à travers l'échelle ℓ est donc

$$\varepsilon^V(\ell) \simeq \frac{v_\ell^2}{\tau_\ell} = \frac{v_\ell^3}{\ell} . \qquad (2.52)$$

En régime stationnaire, $\varepsilon^V(\ell)$ est indépendant de ℓ et égal au taux d'injection d'énergie ε^V, donc $v_\ell^2 = (\varepsilon^V)^{2/3} \ell^{2/3}$ et le spectre d'énergie E_k^V, de l'ordre v_k^2/k, où $k = \frac{2\pi}{\ell}$, est donc donné par

$$E_k^V = C_K (\varepsilon^V)^{2/3} k^{-5/3} . \qquad (2.53)$$

Ce spectre universel est appelé spectre de Kolmogorov (1941). C_K est une constante sans dimension (constante de Kolmogorov) dont la valeur expériementale est environ 1,4.

En turbulence MHD, si l'on fait une analyse purement locale on retrouve le spectre (2.53). Si l'ontient compte toutefois de l'existence d'ondes d'Alfvén de temps caractéristique $\frac{\ell}{b_o}$ on est tenté d'écrire de façon analogue au cas non magnétique

$$\varepsilon^V(\ell) \simeq \frac{v_\ell^2}{\ell / b_o} = \frac{v_\ell^2 b_o}{\ell}$$

ce qui conduit au résultat $E_k^V \simeq C \frac{\varepsilon^V}{b_o} k^{-2}$, qui est correct dimensionnelllement mais faux !

En effet, comme on le verra aux chapitres 3 et 4, le temps de transfert d'énergie varie comme l'inverse du "taux d'amortissement turbulent" ($\frac{\partial}{\partial t} \langle vv \rangle \sim \frac{1}{\mu} \langle vv \rangle - \langle vv \rangle$). Dans le cas où c'est l'amortissement magnétique qui domine μ est de l'ordre de b_o/ℓ et $\mathcal{E}^V(\ell)$ est donc proportionnel à ℓ/b_o. Cette remarque lève l'indétermination du problème dimensionnel (spectre d'énergie dépendant de $\mathcal{E}^V$, b_o et k). Si on postule encore une cascade (semi-locale cette fois puisqu'elle est réglée par une "horloge" non locale), c'est-à-dire un taux de transfert d'énergie indépendant de l'échelle dans la zone inertielle, on obtient le spectre (Kraichnan, 1965).

$$E_k^V = C_V (\mathcal{E}^V b_o)^{\frac{1}{2}} k^{-3/2} \qquad (2.54)$$

Les considérations qui précèdent s'appliquent aussi bien à la cascade d'énegie magnétique et l'on doit d'ailleurs avoir l'équipartition des énergies cinétiques et magnétiques à cause des ondes d'Alfvén.

2.6.3 Cascades d'hélicité

L'idée de cascade locale est basée sur l'hypothèse d'un flux constant d'une quantité conservée par les interactions non linéaires, dans une certaine zone. Comme en turbulence non magnétique, l'hélicité cinétique est aussi conservée on est tenté d'appliquer les raisonnements dimensionnels ci-dessus dans le cas où de l'hélicité cinétique est injectée en même temps que de l'énergie cinétique. Les raisonnements conduisant aux spectres d'énergie et d'hélicité sont donnés dans l'article "Helicity cascades in fully isotropic turbulence" (appendice A3). On trouve que tout se passe comme si l'hélicité cinétique était convectée par la cascade d'énergie et on obtient un spectre d'hélicité

$$H_k^V \simeq \frac{\tilde{\mathcal{E}}^V}{\mathcal{E}^V} E_k^V \qquad (2.55)$$

où $\mathcal{E}^V$ et $\tilde{\mathcal{E}}^V$ sont les taux d'injection d'énergie et d'hélicité cinétiques. (André et Lesieur, 1975).

En turbulence magnétique, l'hélicité magnétique est conservée. Que se passe-t-il si on injecte de l'hélicité magnétique au taux $\tilde{\varepsilon}^M$ en même temps que de l'énergie magnétique ? Un spectre d'hélicité magnétique proportionnel au spectre d'énergie

$$H_k^M \simeq \frac{\tilde{\varepsilon}^M}{\varepsilon^T} E_k^T \qquad (2.56)$$

est limité à $k \leq \varepsilon^T / \tilde{\varepsilon}^M$ par la condition de réalisabilité (2.49) : comme l'injection d'hélicité magnétique se poursuit, on peut donc penser qu'il va se produire une cascade inverse d'hélicité magnétique (vers les petits k). En supposant que le spectre d'hélicité magnétique dans cette cascade ne dépend que du taux d'injection $\tilde{\varepsilon}^M$ et de k, on obtient le spectre

$$H_k^M = C_M (\tilde{\varepsilon}^M)^{2/3} k^{-2} \qquad (2.57)$$

et, si l'hélicité magnétique relative, $k |H_k^M| / E_k^M$, est de l'ordre de un dans cette cascade inverse, alors

$$E_k^M = C_M (\tilde{\varepsilon}^M)^{2/3} k^{-1} . \qquad (2.58)$$

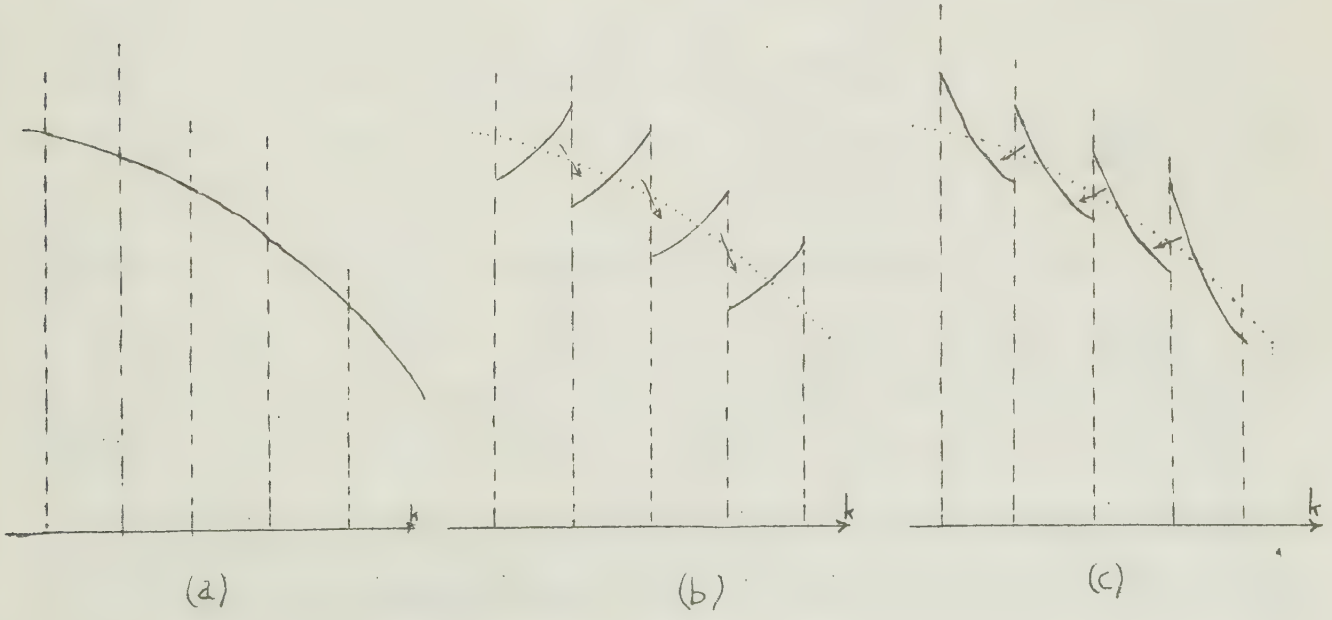
Cette cascade inverse d'hélicité magnétique, en faveur de laquelle d'autres arguments sont donnés dans l'article "Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity" (Appendice A5) a été confirmée par les calculs numériques dont les résultats se trouvent au chapitre 4.

2.7 Mécanique statistique de la turbulence MHD tronquée (cas du fluide parfait)

(voir aussi appendice A5)

La turbulence est essentiellement un phénomène irréversible dans lequel de l'énergie est injectée, transférée et dissipée : c'est un état hors d'équilibre. Néanmoins, l'étude de l'équilibre d'un ensemble fini de modes, sans excitation ni dissipation, qui conduit à des spectres "d'équilibre absolu", peut donner une indication sur le sens du transfert favorisé par les interactions

non linéaires. Isolons en effet par la pensée une bande spatiale étroite située dans le domaine d'inertie (dissipation négligeable). L'équilibre absolu dans cette bande sera atteint en un temps caractéristique qui, pour des raisons dimensionnelles, ne peut être que le temps de Fermi local (ceci est confirmé par l'intégration numérique directe des équations de Navier Stokes) ; or ce temps est précisément le temps caractéristique du transfert d'énergie. Pour prévoir le sens du transfert, on imagine l'expérience fictive suivante. On décompose le spectre au voisinage d'un nombre d'onde k situé dans le domaine d'inertie en un grand nombre de petites bandes (fig. a). A l'instant t on supprime les interactions entre bandes voisines, on laisse évoluer pendant un temps de Fermi local, puis on rétablit les interactions entre bandes. Deux cas peuvent se présenter : si dans chaque bande, le spectre d'équilibre absolu décroit moins vite que le spectre inertiel (par exemple, présente un maximum à droite) (fig. b), un "trop plein" d'énergie s'écoule vers la droite (transfert direct). Dans le cas contraire, le transfert se fait vers la gauche (transfert inverse) (fig.c).



Nous considérons maintenant les solutions des équations de la MHD (24-26) avec $\nu = \lambda = 0$, $\vec{f} = \vec{g} = 0$ telles que $k_{min} < k < k_{max}$. Nous avons déjà vu (§ 2.4) que pour ces solutions, l'énergie totale, l'hélicité magnétique et l'hélicité croisée étaient conservées (à trois dimensions). Pour utiliser les résultats de la mécanique statistique à l'équilibre canonique, il suffit de vérifier que le théorème de Liouville s'applique aux écoulements dans l'espace des phases. $\vec{v}(k)$ et $\vec{b}(k)$ étant complexes, on peut définir un espace des phases réel en introduisant le repère orthonormé $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{k}$ et les composantes réelles de $\vec{v}(k)$ et $\vec{b}(k)$

$$\vec{v}(k) = (x_1 + i\, x_2)\vec{e}_1 + (x_3 + i\, x_4)\vec{e}_2 \quad , \tag{2.59}$$

$$\vec{b}(k) = (x_5 + i\, x_6)\vec{e}_2 + (x_7 + i\, x_8)\vec{e}_2 \quad , \tag{2.60}$$

et il est aisé de vérifier le théorème de Liouville

$$\sum_{\vec{k}} \sum_{i=1,8} \frac{\partial \dot{x}_i(\vec{k})}{\partial x_i(\vec{k})} = 0 \quad , \tag{2.61}$$

en se reportant aux équations (2.27-26).

La densité dans l'espace des phases

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp(-\alpha E_T - \beta H_M - \gamma H_C) \quad , \tag{2.62}$$

est une gaussienne

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp - \tfrac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}\, x_i\, x_j \quad , \tag{2.63}$$

dont les moments du second ordre,

$$\langle x_i\, x_j \rangle = A^{-1}_{ij} \tag{2.64}$$

permettent d'obtenir les spectres d'énergie et d'hélicité. Les calculs, donnés dans l'appendice A5, conduisent aux résultats suivants :

$$E_k^V = \frac{4\pi}{\alpha}\left(1 + \frac{tg^2\varphi}{D(k)}\right) k^2 \qquad (2.65)$$

$$E_k^M = \frac{4\pi}{\alpha \cos^2\varphi} \frac{k^2}{D(k)}$$

$$H^V = -\frac{4\pi}{\alpha} k_c \, tg^2\varphi \, \frac{k^2}{D(k)}$$

$$H_k^M = -\frac{4\pi k_c}{\alpha \cos^2\varphi} \frac{1}{D(k)} \qquad (2.66)$$

$$H_k^C = -\frac{4\pi}{\alpha} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \frac{k^2}{D(k)} \qquad (2.67)$$

où $\varphi = \text{Arc sin}\,\frac{\gamma}{2\alpha}$, $k_c = \beta/(\alpha\cos^2\varphi)$ et $D(k) = 1 - (k_c/k)^2$. Pour que la densité soit normalisable, il faut évidemment que les conditions $\alpha > 0$, $|\gamma| < 2\alpha$ et $k_c < k_{min}$ soient satisfaites (α, β, γ sont en fait déterminés par $< E^T >$, $< H^M >$ et $< H^C >$).

En l'absence d'hélicité magnétique ($\beta = 0$ et $D(k) \equiv 1$) les équations (2.65) donnent les spectres d'équipartition $E_k^V = E_k^M \sim k^2$ obtenus par Lee (1952). Si l'hélicité magnétique totale est non nulle, $\beta \neq 0$ et $D^{-1}(k)$ est maximal pour $k = k_{min}$. On obtient encore l'équipartition approximative avec un spectre en k^2 pour $k \gg k_{min}$ ($D(k) \sim 1$), mais la situation est tout à fait différente pour $k \sim k_{min}$ lorsque $k_{min} - |k_c| \ll k_c$. On obtient une excitation magnétique très forte dans les petits nombres d'ondes (voir Appendice A5 pour les détails de la discussion). Dans cette région on se trouve dans le cas de la figure (c) de ce paragraphe et on s'attend donc à un transfert inverse d'excitation magnétique. Cette conjecture en faveur d'une cascade inverse d'hélicité magnétique est confirmée par l'étude des équations spectrales de la turbulence MHD hélicitaire, présentée au chapitre 4.

3. RAPPELS SUR L'APPROXIMATION QUASI NORMALE MARKOVIENNE A AMORTISSEMENT TURBULENT.

3.1 Introduction.

La turbulence est restée longtemps le domaine privilégié des raisonnements basés sur des considérations dimensionnelles. Le plus connu de ceux-ci conduit à la fameuse loi de Kolmogorov, pour le spectre d'énergie (§ 2.6), assez bien vérifiée expérimentalement, mais pour l'établissement de laquelle les équations de Navier Stokes n'interviennent pas véritablement. Si l'on veut, au contraire, faire plein usage de ces équations, on est conduit à une hiérarchie infinie d'équations reliant les moments de la vitesse d'ordre croissant, alors que l'on s'intéresse principalement à des quantités comme l'énergie ou l'hélicité qui sont définies à partir des moments d'ordre deux.

Dans ce chapitre, nous voulons montrer qu'à partir des équations de Navier Stokes et d'hypothèses assez bien fondées physiquement à défaut de l'être mathématiquement, il est possible d'obtenir des équations spectrales (c'est-à-dire des équations d'évolution pour les spectres d'énergie et d'hélicité) qui permettent, en trubulence homogène et isotrope, d'obtenir des résultats par des méthodes analytiques ou numériques qui supportent de façon satisfaisante la comparaison avec les (maigres) résultats expérimentaux et les simulations numériques directes et surtout permettant de donner un sens précis aux notions de "cascade locale", "cascade directe ou inverse". Nous espérons convaincre le lecteur que, contrairement à ce que l'on a pu penser, la turbulence n'est plus un domaine où l'on peut faire n'importe quoi sans risquer d'être contredit et que le sujet n'est pas aussi hermétique que sa réputation le laisse croire. Nous ne parlerons ici que des résultats connus en turbulence homogène, isotrope, non magnétique et non hélicitaire, en réservant les résultats nouveaux en turbulence magnétique hélicitaire pour le chapitre suivant.

L'étude analytique de la turbulence a particulièrement progressé ces dernières années à partir des modèles ou approximations suivantes : l'approximation d'interaction directe (Direct Interaction Approximation : DIA) de Kraichnan (1959), le modèle à couplage aléatoire (Random Coupling Model : RCM) de Kraichnan (1961), l'approximation de l'interaction directe Lagrangienne (Lagrangian History Direct Interaction : LHDI) de Kraichnan (1965), l'approximation des phases aléatoires (generalized random phase approximation) d'Edwards (1964), l'approximation du champ self consistent d'Herring (1965), l'approximation quasi normale markovienne à amortissement turbulent (Eddy Damped Quasi Normal Markovianized : EDQNM) d'Orszag (1970 et 1974), le modèle du champ d'épreuve (Test Field Model : TFM) de Kraichnan (1971 a), et le modèle à couplage aléatoire markovien (MRCM) (Frisch, Lesieur, Brissaud, 1971 et 1974) (Pour une revue de ces théories, voir Leslie, 1973 et aussi Frisch et al., 1975). Le mot "approximation" signifie ici que les équations de Navier-Stokes ont été simplifiées au moyen d'hypothèses justifiées par des arguments physiques tandis que le mot "modèle" signifie que les équations de Navier-Stokes ont été remplacées par d'autres équations ayant, jusqu'à un certain point, les mêmes propriétés structurelles mais qui conduisent à des équations spectrales fermées. Ces propriétés structurelles (voir par exemple le chapitre 2 pour le cas de la turbulence magnétique) constituent des contraintes telles que tous les modèles ou approximations citées conduisent à des équations spectrales assez comparables (mais non identiques !) et nous n'établirons ici que les équations de l'approximation EDQNM d'Orszag, car elle nécessite moins de calculs que les autres et elle se prête particulièrement bien à l'étude de la turbulence MHD.

3.2 Amortissement turbulent et markovianisation.

Pour obtenir des équations spectrales à partir des équations de Navier-Stokes, on est ramené essentiellement à un problème de fermeture d'une hiérarchie infinie d'équation pour les moments de la vitesse (hiérarchie de Karman & Howarth dans le cas homogène et isotrope). Avant l'apparition des modèles probabilistes énumérés au paragraphe précédent, ce problème de fermeture a d'abord été abordé dans le cadre de l'hypothèse quasi-normale (Millionshtchikov, 1941 ; Proudman & Reid, 1954 ; Tatsumi, 1957 ; Ogura, 1963). Dans cette hypothèse, après élimination des moments d'ordre trois entre les deux premières équations de la hiérarchie, les moments d'ordre quatre sont factorisés comme si la vitesse était une fonction aléatoire gaussienne, et l'on obtient des équations fermées quadratiques pour les moments d'ordre deux, tandis que les moments d'ordre trois ne sont pas nuls. Le niveau atteint par les moments d'ordre trois est très important car ce sont de tels moments qui sont responsables du transfert d'énergie. C'est ainsi que le coefficient de dissymétrie pour la dérivée spatiale de la vitesse

$$S_0 = - \frac{\langle (\partial v_1 / \partial x_1)^3 \rangle}{\langle (\partial v_1 / \partial x_1)^2 \rangle^{3/2}} \qquad (3.1)$$

croît à partir de 0 si les conditions initiales sont gaussiennes, pour se saturer à la valeur de 0.78 (en un temps fini) (Orszag, 1974). CEtte valeur est en contradiction d'une part avec une inégalité, déduite de considérations cinématiques, due à Betchov (1956) et qui, dans le cas de turbulence quasi-normale s'écrit $S_0 \leq 0.756$ et, d'autre part, avec les mesures expérimentales à grand nombre de Reynolds pour lesquelles $S_0 \simeq 0.4$. Lorsque les calculs numériques d'Ogura (1963) eurent montré que pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés, l'hypothèse quasi normale conduisait à des spectres d'énergie négatifs, la validité de cette hypothèse et, plus généralement, de toute méthode

à base d'hypothèses de fermeture, fut sérieusement mise en doute. Ce sont les modèles probabilistes indiqués au paragraphe précédent qui ont permis de comprendre précisément les insuffisances des méthodes de fermeture basées sur la seule hypothèse quasi-normale et comment ses défauts pouvaient être corrigés (Orszag, 1970).

La limitation de la croissance des corrélations triples (mesurées par exemple par S_0) aux valeurs observées ne peut être due qu'à l'effet des cumulants d'ordre quatre qui ont été considérés comme nuls dans l'hypothèse quasi-normale. En effet, si l'on écrit symboliquement les équations de Navier-Stokes, de façon à mettre seulement en évidence leur degré de non linéarité (le terme linéaire dissipatif peut être aisément rétabli dans les expressions finales)

$$\frac{\partial}{\partial t} v = vv \qquad (3.2)$$

Les deux premières équations de la hiérarchie s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle vv \rangle = \langle vvv \rangle \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle vvv \rangle = \langle vv \rangle \langle vv \rangle + \langle vvvv \rangle_c \qquad (3.4)$$

où le terme $\langle vvvv \rangle_c$, cumulant d'ordre quatre, est par définition la correction non gaussienne. Lorsqu'on néglige ce terme, les termes $\langle vv \rangle \langle vv \rangle$ apparaissent comme des termes sources pour les corrélations triples sans mécanisme de relaxation associé. D'autre part les équations de l'approximation quasi-normale (à viscosité nulle), de la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle vv \rangle = \sum \langle vv \rangle \langle vv \rangle \qquad (3.5)$$

sont invariantes par renversement du temps : elles ne peuvent décrire une approche irréversible vers l'équilibre que si la viscosité est introduite, alors que les propriétés universelles de la turbulence (dans la zone inertielle) ne devraient pas la faire intervenir. On est donc amené à traduire le couplage

des équations (3.3-4) avec les équations d'ordre plus élevé par une relation de fermeture fonctionnelle

$$< vvvv >_c = \mathcal{F}(< vv >, < vvv >). \qquad (3.6)$$

Comme les mesures expériementales et les simulations numériques directes semblent indiquer que les corrélations triples restent "petites" (cf. $S_0 \simeq 0.4$), on peut tout simplement linéariser l'équation par rapport aux corrélations triples (Frisch et al., 1975)

$$< vvvv >_c = - \mu (< vv >) < vvv > \qquad (3.7)$$

où $\mu(t)$ est appelé <u>taux d'amortissement turbulent</u> des corrélations triples. En supposant que les corrélations triples initiales sont nulles (conditions initiales gaussiennes) et en tenant compte de la relation (3.7), on peut intégrer l'équations (3.4) :

$$< vvv >_t = \int_o^t g(t,\tau) < vv >_\tau < vv >_\tau \, d\tau , \qquad (3.8)$$

où g est la fonction de green de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \mu(t)$ et les indices t, τ dénotent les arguments temporels. On obtient donc les équations spectrales sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} < vv >_t = \int_o^t g(t,\tau) < vv >_\tau < vv >_\tau \, d\tau . \qquad (3.9)$$

Enfin, afin d'assurer la positivité des spectres d'énergie, on "markovianise" l'équation (3.9) qui devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} < vv >_t = \Theta(t) < vv >_t < vv >_t , \qquad (3.10)$$

où

$$\Theta(t) = \int_o^t g(t,\tau) d\tau = \int_o^t d\tau \exp - \int_\tau^t \mu(s) ds , \qquad (3.11)$$

dont la forme stationnaire est simplement $\Theta = \mu^{-1}$ (3.12)

(Θ est appelé temps de mémoire"). La markovianisation est indispensable pour trouver un processus stochastique dont les moments d'ordre deux sont solutions de l'équation (10),

ce qui entraîne que les solutions de cette équation sont "réalisables". Le processus le plus simple est décrit par une équation de type Langevin (Leith, 1971). On peut aussi revenir aux équations de Navier-Stokes en introduisant un couplage aléatoire (Lesieur, Frisch & Brissaud, 1971 ; Herring & Kraichnan, 1972 ; Lesieur, 1973 ; Frisch, Lesieur & Brissaud, 1974). Cette markovianisation est une modification minime si le temps de relaxation des corrélations triples $1/\mu$ est petit devant le temps d'évolution des corrélations doubles, c'est-à-dire du spectre d'énergie, et ceci est bien réalisé dans la zone inertielle telle que $k \gg k_E$ est le nombre d'onde caractéristique des tourbillons porteurs d'énergie) ; en effet le rapport du premier au second de ces deux temps varie comme $(k/k_E)^{-2/3}$ (cf. temps de Fermi, § 2.6 et équ. 3.18). Si cette markovianisation n'était pas faite, des spectres d'énergie négatifs pourraient être obtenus. L'équation (3.9) est en fait une équation pour la dérivée seconde temporelle du spectre et on peut montrer que si le spectre d'énergie s'annule pour le vecteur d'onde k_1 à l'instant t_1 ($E^V_{k_1}(t_1) = 0$) alors $\frac{\partial^2}{\partial t^2} E^V_{k_1}(t_1)$ est positif, mais comme l'intégrale temporelle dans (9) fait intervenir tout le passé de la turbulence, $\frac{\partial}{\partial t} E^V_{k_1}(t_1)$ peut être négatif et dans ce cas le spectre d'énergie devient négatif (Orszag, 1974). Avec la même condition, à l'instant t_1 ($E^V_{k_1}(t_1) = 0$) l'équation markovienne (3.10) donne toujours $\frac{\partial}{\partial t} E^V_{k_1}(t_1) > 0$ et les spectres d'énergie resteront positifs.

3.3 Expression du taux d'amortissement turbulent.

L'effet de décorrélation des structures par la turbulence est manifeste dans le cas de l'advection d'un scalaire passif : un polluant introduit en un point de l'atmosphère diffuse rapidement sous l'effet de la turbulence.

Pour décrire de façon analogue la relaxation des corrélations triples de la vitesse, Kraichnan a introduit un problème auxiliaire, l'advection d'un "champ d'épreuve" passif par l'écoulement turbulent (Test Field Model ; Kraichnan, 1971 ; Sulem, Lesieur, Frisch, 1975). Cette approche, qui n'introduit aucune constante arbitraire conduit à des résultats en bon accord avec les mesures expériementales et les simulations numériques directes, malheureusement elle conduit à des équations d'une complication algébrique excessive en turbulence MHD hélicitaire. Nous montrerons ici comment le taux d'amortissement turbulent peut s'obtenir par des considérations heuristiques simples laissant indéterminée une constante de l'ordre de l'unité, mais qui conduisent à des résultats équivalents à ceux résultant du modèle du champ d'épreuve en turbulence non magnétique et qui se généralisent facilement au cas de la turbulence magnétique (chapitre 4).

Nous prendrons le μ_{kpq} aux d'amortissement turbulent relatif à une triade $(\vec{k},\vec{p},\vec{q})$ de la forme

$$\mu_{kpq} = \mu_k + \mu_p + \mu_q \quad , \tag{3.13}$$

où μ_k est un taux (associé au mode k) que l'on va déterminer maintenant. D'autres expressions sont envisageables, par exemple $\mu_{kpq} = (\mu_k^2 + \mu_p^2 + \mu_q^2)^{\frac{1}{2}}$ mais elles conduisent à des résultats sensiblement identiques (Kraichnan, 1971).

Remarque : Pour préserver les relations de conservation (énergie, hélicité) au niveau des équations spectrales, il faut que $\ominus$ défini par (3.10-11) soit complètement symétrique en k,p,q ; d'où le choix ci-dessus.

La viscosité est une première cause évidente d'amortissement (non turbulente) des corrélations triples, qui est déjà prise en compte dans l'approximation quasi-normale dont les équations s'écrivent de façon encore symbolique (cf. 3.3-4) $\left(\vec{k}=\vec{p}+\vec{q}\right)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \langle v(\vec{k})\, v(-\vec{k})\rangle = \langle v(-\vec{k})\, v(\vec{p})\, v(\vec{q})\rangle , \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v(-\vec{k})\, v(\vec{p})\, v(\vec{q})\rangle = \sum \langle vv\rangle\langle vv\rangle - \nu(k^2+p^2+q^2)\langle v(-\vec{k})\, v(\vec{p})\, v(\vec{q})\rangle . \qquad (3.15)$$

Dans ces équations, apparaît le taux d'amortissement par viscosité

$$\mu^D_{kpq} = \mu^D_k + \mu^D_p + \mu^D_q = \nu(k^2 + p^2 + q^2), \qquad (3.16)$$

où

$$\mu^D_k = \nu k^2 \qquad (3.17)$$

Il faut maintenant former un taux d'amortissement turbulent pour le nombre d'onde k, traduisant l'effet des interactions non linéaires. En turbulence non magnétique, les interactions sont locales (dans l'espace des vecteurs d'onde) et le seul taux caractéristique que l'on puisse former dans la zone inertielle pour le mode k est le taux de cisaillement, inverse du temps de Fermi (§ 2.6). (S pour "Shear").

$$\mu^S_k \simeq (k^3 \quad E^V_k)^{\frac{1}{2}} . \qquad (3.18)$$

Cette expression est inadéquate lorsque l'on étudie l'évolution d'une turbulence donnée initialement avec un spectre à décroissance rapide (e.g, $E^V_k \sim k^4 \exp -2k^2$)) et que l'on se place avant l'instant d'apparition de la zone inertielle (Brissaud et al, 1973). On obtient alors un taux d'amortissement négligeable dans la zone des grands nombres d'ondes alors que, dans ce cas particulier, il est en fait dominé par le cisaillement à grande échelle et non par la dynamique locale. Pour tenir compte de ce phénomène, on choisit l'expression plus appropriée (Pouquet et al, 1974)

$$\mu^S_k = \left(\int_0^k q^2\, E^V_q\, dq\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.19)$$

qui est très proche du taux (3.18) lorsqu'une zone inertielle est établie ($E_k^V \sim k^{-n}$, $n < 3$). On peut aussi retrouver cette équation par un calcul approché dans le modèle du champ d'épreuve (Sulem, Lesieur, Frisch, 1975). L'expression du coefficient de relaxation des corrélations triples comprend le terme d'amortissement par viscosité et le terme d'amortissement turbulent par cisaillement

$$\mu_{kpq} = \nu^D_{kpq} + C_S \nu^S_{kpq} \tag{3.20}$$

C_S est une constante numérique de l'ordre de un, qui ne peut pas être déterminée par les considération dimensionnelles qui nous ont guidées. Elle peut être ajustée pour obtenir une constante de Kolmogorov conforme aux mesures expérimentales : $C_K \simeq 1.4$ (André et Lesieur, 1975) (voir § 3.7).

3.4 Les équations spectrales dans l'approximation de l'amortissement turbulent

On se place dans le cas général d'équations quadratiques

$\frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{L}(X,X)$ que l'on peut écrire sous la forme tensorielle

$$\frac{\partial X^a}{\partial t} = L^a_{bc} \; X^b \; X^c \tag{3.21}$$

où L^a_{bc} est un opérateur bilinéaire déterministe indépendant du temps, symétrique

$$L^a_{bc} = L^a_{cb} \tag{3.22}$$

X est un vecteur dont la valeur à l'instant initial est aléatoire, de valeur moyenne nulle

$$\langle X \rangle \equiv 0 \tag{3.23}$$

On cherche les équations d'évolution des moments du second ordre du vecteur X, notés,

$$\langle X^a X^f \rangle = \langle a\, f \rangle . \tag{3.24}$$

Les lettres a, b, c, ..., f symbolisent un ensemble d'indices pour les composantes du vecteur (1, 2, 3), d'arguments pour les vecteurs d'ondes (k, p, q) d'exposants relatifs à la nature du vecteur (cinétique ou magnétique, V ou M) dans le cas des équations de la magnétohydrodynamique. Les deux premières équations de la hiérarchie des moments s'écrivent alors dans l'approximation EDQNM (équs. 3. 3-4 et 3.7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a\, f \rangle = L^a_{bc} \langle bcf \rangle + L^f_{de} \langle ade \rangle \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle ade \rangle = L^a_{bc} \langle bcde \rangle_{QN} + L^d_{gh} \langle aghe \rangle_{QN} + L^e_{mn} \langle admn \rangle_{QN} - \mu \langle ade \rangle \tag{3.26}$$

où le taux d'amortissement turbulent μ est déterminé à l'aide des considérations du § 3.3 qui montrent que ce taux dépend essentiellement de la triade k, p, q intervenant dans les moments tels que $\langle bcf \rangle$ ou $\langle ade \rangle$. Les indices QN indiquent que les moments d'ordre quatre sont à factoriser comme dans le cas de l'hypothèse quasi normale (par exemple :
$\langle bcde \rangle_{QN} = \langle bc \rangle \langle de \rangle + \langle bd \rangle \langle ce \rangle + \langle be \rangle \langle cd \rangle$). En intégrant (3.26) avec des conditions initiales gaussiennes ($\langle ade \rangle_0 = 0$), en reportant dans (3.25) et après markovianisation (comme expliqué au § 3.2), on obtient une équation spectrale fermée pour les moments d'ordre deux

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle af \rangle = \Theta_{bcf}(t)\, L^a_{bc} \left[I \right] + \Theta_{ade}(t) L^f_{de} \left[II \right] \tag{3.27}$$

$$I = L^b_{de}(\langle dc \rangle \langle ef \rangle + \langle df \rangle \langle ec \rangle) + L^c_{\ell m}(\langle b\ell \rangle \langle mf \rangle + \langle bm \rangle \langle \ell f \rangle) + L^f_{np}(\langle bn \rangle \langle cp \rangle + \langle bp \rangle \langle cn \rangle)$$

$$II = L^a_{bc}(\langle bd \rangle \langle ce \rangle + \langle be \rangle \langle cd \rangle) + L^d_{gh}(\langle ag \rangle \langle he \rangle + \langle ah \rangle \langle ge \rangle) + L^e_{mn}(\langle am \rangle \langle dn \rangle + \langle an \rangle \langle dm \rangle)$$

On a utilisé la condition $L^b_{de} \langle de \rangle \equiv 0$, nécessaire pour vérifier (3.23) à tout instant. On revient maintenant à la forme opératorielle en reliant par un crochet ⌐¬ les deux composantes constituant un moment d'ordre deux donné, par exemple

$$L^a_{bc} \; L^b_{de} \; \langle dc \rangle \langle ef \rangle = L^a_{bc} (L^b_{de} (\overbrace{X^d, X^e}), X^c) \, X^f . \quad (3.28)$$

A l'aide des symétries (3.22), on peut regrouper les termes et on obtient les équations spectrales

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X \boxtimes X \rangle = 4 \Theta(t) \{ \mathcal{L}(\overbrace{X,X}) \boxtimes \mathcal{L}(X,X) + \mathcal{L}\mathcal{L}(\overbrace{X,X},X) \boxtimes X + X \boxtimes \mathcal{L}(\overbrace{X,\mathcal{L}(X,X)}) \} . \quad (3.29)$$

Si l'on part d'une équation de la forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{L}(X,X) + \mathcal{L}_o X \quad (3.30)$$

où $\mathcal{L}_o$ est un opérateur linéaire (par exemple la dissipation), on vérifie facilement qu'il suffit de remplacer le membre de gauche de l'équation (3.29) par

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X \boxtimes X \rangle - \underbrace{X \boxtimes \mathcal{L}_o X} - \underbrace{\mathcal{L}_o X \boxtimes X} .$$

Remarque : Les équations spectrales obtenues sont identiques à celles du modèle markovien à couplage aléatoire (Markovian Random Coupling, MRC. Frisch, Lesieur & Brissaud, 1974) lorsqu'on remplace $\Theta(t)$ par un facteur constant $\tau_o/2$ ayant la dimension d'un temps. Le modèle MRC n'est qu'une légère variante du modèle à couplage aléatoire de Kraichnan (RCM ; Kraichnan, 1961) : dans le cas MRC les coefficients de couplage sont du bruit blanc au lieu d'être indépendants du temps.

3.5 Les équations spectrales de la turbulence homogène, isotrope, non magnétique et non hélicitaire.

Pour écrire explicitement les équations spectrales (3.29) dans le cas de la turbulence homogène isotrope non magnétique non hélicitaire, il suffit de remplacer l'opérateur $\mathcal{L}$ par son expression (2.24)

$$L^{\ell}_{mn} X^m X^n = -\frac{i}{2} P_{\ell mn}(\vec{k}) \sum_p v_m(\vec{p})\, v_n(\vec{k}-\vec{p}), \qquad (3.31)$$

puis de simplifier les termes de croissance à l'aide des relations d'homogénéité (2.34) et enfin de passer à la limite $L \longrightarrow \infty$ en utilisant les relations (2.37-38).

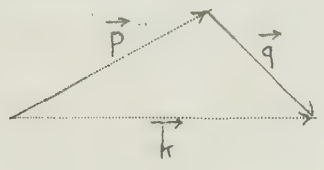
Les corrélations doubles ne dépendent que de la fonction scalaire E^V_k (cf. équ. 2.40 et 2.43), densité spectrale d'énergie cinétique

$$\langle v_i(\vec{k}) v_j(-\vec{k}) \rangle_\infty = \frac{1}{4\pi k^2} P_{ij}(\vec{k}) E^V_k \quad . \qquad (3.32)$$

Chacun des trois termes de l'équation (3.29) est un produit de deux opérateurs $\mathcal{L}$ et de deux corrélations doubles et nécessite donc le calcul de produits d'opérateurs tels que, par exemple,

$$P_{ijf}(\vec{k})\, P_{fim}(\vec{p})\, P_{jm}(\vec{k}-\vec{p}) = -2\, k^2 b_{kpq}\,, \qquad (3.33)$$

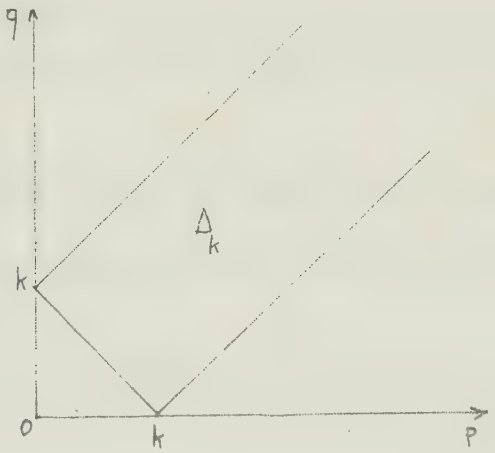
dont la valeur ne dépend pas des directions des vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{p}$ mais seulement du triangle formé avec k, p et q = $|\vec{k} - \vec{p}|$



b_{kpq} est un nombre sans dimension appelé coefficient géométrique et il apparaît comme facteur dans des produits $E_p^V E_q^V$ qui ne dépendent aussi que du module des vecteurs d'ondes $\vec{p}$ et $\vec{q}$. Il apparaît des intégrales telles que $\int d^3p\, f(k,p,q)$ où k, p, q sont les côtés d'un triangle qui peut se ramener à une intégrale dans le plan (p,q), bornée par les inégalités triangulaires $|k - p| \leq q \leq k + p$

$$\int d^3p\, f(k,p,q) = 2\pi \int_{\Delta_k} \frac{pq}{k} f(k,p,q)\, dp\, dq \,. \qquad (3.34)$$

Le domaine Δ_k est figuré ci-dessous



Après quelques calculs sans difficultés, mais longs, et après avoir ajouté le terme de viscosité (cf. (3.30)), on obtient l'équation

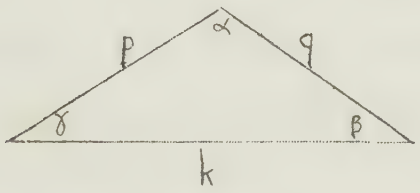
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E_k^V = \int_{\Delta_k} dp\, dq\, \Theta_{kpq}\, T_{VV}^V \,, \qquad (3.35)$$

où Θ_{kpq} est donné par (3.11) et (3.20); et

$$T_{VV}^V = \frac{k}{pq} b_{kpq} \left(k^2 E_p^V E_q^V - p^2 E_q^V E_k^V\right) \,, \qquad (3.36)$$

$$b_{kpq} = \frac{p}{k}(xy + z^3) \quad , \tag{3.37}$$

et x, y, z sont les cosinus des angles intérieurs du triangle formé avec k, p et q ($x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$).



3.6 Propriétés des équations spectrales.

On vérifie facilement qu'à viscosité nulle, les équations (3.35) conservent l'énergie totale $\int dk\, E_k^V$ (sous réserve que les intégrales convergent) et nous avons vu au § 3.2 que la positivité du spectre était assurée. Dans le cas particulier du modèle MRCM (Frisch, Lesieur & Brissaud, 1974) où $\Theta_{kpq}(t) = \frac{\tau_o}{2}$, l'enstrophie $\langle D^V(t) \rangle$ (équ. 2.7) vérifie, à viscosité nulle, l'équation

$$\frac{d}{dt}\langle D^V(t) \rangle = \frac{\tau_o}{6} \langle D^V(t) \rangle^2 \quad , \tag{3.38}$$

et devient donc infinie au bout du temps fini

$$t^* = \frac{6}{\tau_o \langle D^V(0) \rangle} \quad . \tag{3.39}$$

On vérifie que pour $t > t^*$ la solution obtenue en faisant tendre la viscosité vers zéro ne conserve plus l'énergie (catastrophe énergétique) ; t^* est appelé temps de catastrophe (cf. Appendice A4). L'existence d'une catastrophe

lorsque Θ dépend du temps (équ. 3.11) n'a pas pu être établie analytiquement, mais elle est manifeste sur les résultats numériques (André & Lesieur, 1975).

On montre que le spectre E_k^V possède une zone d'inertie en $k^{-5/3}$ (§ 3.7) et le coefficient C_S peut être ajusté de façon à obtenir la bonne constante de Kolmogorov $C_K = 1.4$ (André & Lesieur, 1975). Dans le cas inviscide tronqué, on retrouve le spectre de Lee (1952) en k^2 (cf. § 2.7).

Les équations (3.35) se prêtent bien au calcul numérique à des nombres de Reynolds élevés (plusieurs centaines de mille si le nombre de Reynolds est défini comme le quotient de la vitesse quadratique moyenne par le produit du nombre d'onde d'injection et de la viscosité cinématique). Contrairement aux équations de Navier-Stokes aléatoires qui doivent être discrétisées dans un réseau à maille cubique, les équations spectrales dont les solutions sont beaucoup plus régulières permettent une discrétisation logarithmique des vecteurs d'ondes et donc un rapport beaucoup plus élevé entre le nombre d'onde où commence la dissipation et celui où est injectée l'énergie. Les calculs numériques donnent un coefficient de dissymétrie S_o proche de la valeur mesurée ($S_o \simeq 0.4$). Une des applications les plus intéressantes de l'approximation de l'amortissement turbulent est l'étude de la prédictabilité d'un écoulement (Leith, 1971). Pouquet et al., (1975) ont étudié la turbulence bidimensionnelle avec un nombre de Reynolds de 3.10^6 ; tandis que André & Lesieur, (1975) ont étudié la turbulence tridimensionnelle avec hélicité avec un nombre de Reynolds de 524 000. On pourra trouver dans Herring & Kraichnan (1972) une comparaison détaillée des modèles et approximations pour la turbulence homogène, isotrope.

3.7 Zone inertielle et cascade d'énergie.

Les équations spectrales (3.35) permettent une étude analytique du transfert d'énergie dans la zone inertielle (Kraichnan, 1967 ; Kraichnan, 1971 ; André & Lesieur, 1975).

Soit $T_{k;p,q}$ le taux de transfert non linéaire d'énergie des modes p et q vers le mode k, défini par :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2)\, E_k^V = \int_{\Delta_k} dp\, dq\, T_{k;p,q} = T_k \,. \qquad (3.40)$$

Si $T_{k;p,q}$ n'est pas symétrique en p et q, on le symétrise en le remplaçant par $\frac{1}{2}(T_{k;p,q} + T_{k;p,q})$.

On définit aussi le flux d'énergie à travers le mode K, dû au transfert non linéaire

$$\Pi_K = - \int_o^K T_k\, dk \qquad (3.41)$$

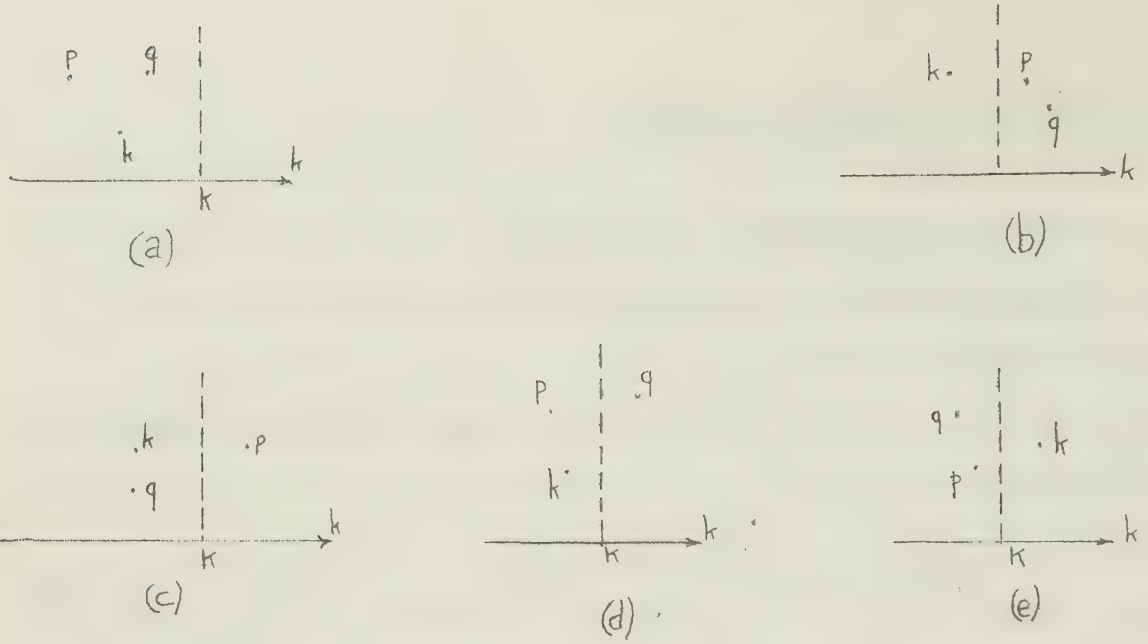
Π_K est positif lorsque les termes non linéaires transfèrent l'énergie des petits nombres d'onde vers les grands. La propriété de conservation détaillée de l'énergie pour la triade k, p, q (§ 2.4) s'écrit dans le cas présent :

$$T_{k;p,q,} + T_{p;q,k} + T_{q;k,p} = 0 \,. \qquad (3.42)$$

Grâce à (3.42) et à la symétrie de $T_{k;p,q}$ en p et q il est facile de montrer que Π_K se met sous la forme

$$\Pi_K = \int_K^\infty dk \int_o^K dpdq\ T_{k;p,q} - \int_o^K dk \int_K^\infty dpdq\, T_{k;p,q} = \Pi_K^+ - \Pi_K^- \qquad (3.43)$$

Pour la démonstration, il est commode de visualiser les différentes situations de k, p, q par rapport à K (figures ci-après).



Par définition, $T_K = T^a + T^b + T^c + T^d$. La relation de conservation (3.42) entraîne $T^a = 0$ et $T^c + T^d + T^e = 0$ donc $T_K = T^b - T^e = T^+_K - T^-_K$.

T^+_K est la contribution sur les nombres supérieurs à K de l'interaction des nombres d'onde inférieurs à K (remarque analogue pour T^-_K).

Cherchons à quelles conditions existe une zone inertielle c'est-à-dire une zone où le flux d'énergie T_K est constant, indépendant de K. Pour cela nous évaluons $T_{\lambda K}$ et écrivons qu'il est indépendant de λ ; on a :

$$T^+_{\lambda K} = \int_{\lambda K}^{\infty} dk \int_0^{\lambda K} dp \int_0^{\lambda K} dq\, T_{k;p,q} \,. \qquad (3.45)$$

Au moyen des changements de variables $k_1 = k/\lambda$, $p_1 = p/\lambda$ et $q_1 = q/\lambda$, $T^+_{\lambda K}$ s'écrit $T^+_{\lambda K} = \lambda^3 \int_K^{\infty} dk_1 \int_0^K dp_1 \int_0^K dq_1\, T_{\lambda k;\lambda p_1,\lambda q_1}$ et de même pour $T^-_{\lambda K}$.

L'égalité $T_{\lambda K} = T_K$ ne peut être réalisée pour tout λ que si

$$T_{\lambda k;\lambda p,\lambda q} = \lambda^{-3} T_{k;p,q} \qquad (3.46)$$

Cherchons quelle condition cette relation impose au spectre E^V_k. L'expression de $T_{k;p,q}$ résultant de (3.35-36) est, après symétrisation

$$T_{k;p,q} = \frac{\Im_{kpq}(t)}{2} \left[\frac{k}{pq} b_{kpq} (k^2 E^V_p E^V_q - p^2 E^V_q E^V_k) + p \longleftrightarrow q \right] \qquad (3.47)$$

Dans la zone d'inertie, la contribution de la viscosité au taux d'amortissement turbulent est évidemment négligeable et le temps de mémoire, tel qu'il résulte de (3.12-13) et (3.18) est, à une constante numérique près :

$$\theta_{kpq}(t) = \left[(k^3 E_k^V)^{\frac{1}{2}} + (p^3 E_p^V)^{\frac{1}{2}} + (q^3 E_q^V)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \qquad (3.48)$$

En notant que b_{kpq}, donné par (3.37) est sans dimension; nous obtenons finalement en supposant $E_k^V \sim k^{-n}$

$$T_{\lambda k;\lambda p,\lambda q} = \lambda^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-3n/2} T_{k;p,q} \qquad (3.49)$$

En comparant avec (3.46), il vient donc n = 5/3, soit $E_k^V \sim k^{-5/3}$.

Ce calcul ne suffit pas à montrer l'existence d'une zone inertielle en $k^{-5/3}$ (il ne diffère guère en effet d'une analyse dimensionnelle). Il faut encore vérifier que les intégrales donnant T_K convergent avec un spectre ayant une telle loi de puissance, ce qui se fait en utilisant en particulier le développement de b_{kpq} pour les triangles très aplatis (cf. Appendice A2). Il est aussi possible de réduire l'expression de T_K à une intégrale simple en prenant pour nouvelle variable d'intégration v le rapport du plus petit nombre d'onde de la triade au nombre médian ($0 \leq v \leq 1$). La contribution majeure à cette intégrale provient de la région $v \leq 1$ ce qui montre que le transfert se fait localement dans l'espace des nombres d'ondes (cascade locale d'énergie). Comme T_K est positif dans le cas de la turbulence non magnétique à trois dimensions, la cascade est dite directe (sinon elle serait inverse) et enfin l'identification de T_K dans la zone inertielle où

$$E_k^V = C_K (\varepsilon^V)^{2/3} k^{-5/3} , \qquad (3.50)$$

au taux d'injection d'énergie ε^V permet de déterminer la constante de Kolmogorov ou d'ajuster la constante C_S du § 3.3 ($C_S \simeq 0.355$ pour avoir $C_K \simeq 1.4$)

Noter que dans la turbulence bidimensionnelle, non magnétique, il y a deux sortes de cascades, une directe et non locale, d'enstrophie et une inverse, d'énergie (Kraichnan, 1971 b ; Leith, 1971 ; Pouquet et al, 1975).

4. LA TURBULENCE MHD HOMOGENE ISOTROPE HELICITAIRE

4.1. Aperçu bibliographique

Nous rappelons d'abord les deux questions principales concernant la turbulence MHD entretenue par injection d'énergie cinétique :

(i) quel est le niveau de l'énergie magnétique relativement à celui d de l'énergie magnétique

(ii) y a-t-il un mécanisme conduisant à l'apparition d'énergie magnétique à grande échelle ?

Pour classer une bibliographie du sujet, on peut distinguer trois types de travaux :

i) les théories phénoménologiques qui se sont développées à partir du fameux argument de Batchelor (1950) sur l'analogie entre champ magnétique et champ de vorticité et la possibilité d'un accroissement du champ magnétique par étirement du champ : cet argument a été discuté, notamment par Biermann et Schlüter (1951).

ii) les théories linéaires de la dynamo homogène, dans lesquelles le champ de vitesse est donné (par ses moments d'ordre deux) qui cherchent une équation d'évolution pour la valeur moyenne du champ magnétique. Les premiers résultats concernant le rôle de l'hélicité cinétique ont été obtenus par Steenbeck, Krause, Rädler (1966). Partant de la solution de l'équation de diffusion, une solution de l'équation complète d'évolution du champ est obtenue par itération. En fait, quand le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment grand, le terme de diffusion est négligeable (en dehors des petites échelles) et l'on doit résoudre l'équation linéaire stochastique

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{b}) \quad , \tag{4.1}$$

où $\vec{v}$, de valeur moyenne nulle, est donné par ses moments. Ce problème n'a pas encore reçu de solution satisfaisante (Roberts & Soward, 1975). Dans la limite

des faibles nombres de Reynolds magnétique, l'équation d'évolution pour le champ moyen obtenue par Steenbeck, Krause & Rädler (1966) et Moffat (1970)

$$\frac{\partial \langle \vec{b} \rangle}{\partial t} = \alpha \, \mathrm{rot} \langle \vec{b} \rangle + \chi_{turb} \Delta \langle \vec{b} \rangle$$

conduit à une croissance exponentielle du champ moyen. Le coefficient α est lié à l'hélicité cinétique de la turbulence et cette limite linéaire sera généralisée au paragraphe 4.4.3, pour une turbulence de champ moyen nul, à grand nombre de Reynolds magnétique. Le lecteur intéressé par la résolution du problème linéaire pourra utilement se reporter aux revues de Roberts (1971) et Gubbins (1974).

iii) Les théories non linéaires de la turbulence MHD. Chandrasekhar (1955, 1957) étend la théorie d'Heisenberg à la turbulence MHD, mais cette théorie ne prend pas en compte le transfert des petites échelles vers les grandes échelles. Il suppose aussi des spectres en $k^{-5/3}$, ce qui ne convient pas, comme on l'a vu au § 2.6. Roberts & Tatsumi (1960) et Tatsumi (1960) prennent l'hypothèse quasi-normale dans une turbulence sans hélicité. Ils donnent la décroissance du champ à partir d'un spectre initial formé d'une seule raie (mais cette solution est un développement en puissances croissantes du nombre de Reynolds). Nous avons vu au § 3.2 que l'hypothèse quasai-normale conduisait à un spectre d'énergie non positif. C'est à partir de l'approche de Kraichnan qu'une étude quantitative de la turbulence MHD a été possible. Kraichnan (1958) donne les équations de la turbulence MHD dans l'approximation de l'interaction directe (DIA) et il montre (1965 b) que le spectre doit comporter une zone inertielle en $k^{-3/2}$ par une analyse approfondie du rôle des modes d'Alfvén. Kraichnan et Nagarajan (1967) discutent particulièrement des effets comparés de la viscosité et de la diffusivité magnétique. Nagarajan (1969) étudie numériquement les équations DIA de la turbulence MHD et trouve un spectre en $k^{-3/2}$, mais sur 2 octaves environ ($k \simeq 6$ à $k \simeq 18$). Enfin Nagarajan (1970) étudie numériquement la turbulence MHD sans hélicité dans l'approximation de l'amortissement turbulent mais l'intervalle spectral utilisé est encore très étroit.

4.2 Détermination du taux d'amortissement turbulent (effet Alfvén)

Nous avons vu au § 2.6 que la présence de champs magnétiques à grande échelle modifiait profondément la dynamique des petites échelles. Il faut généraliser le taux d'amortissement turbulent donné au § 3.3 en étudiant la relaxation des corrélations triples dans des champs magnétiques à grande échelle. Si l'on écrit les équations de la MHD avec les variables $\vec{z}^{+} = \vec{v} + \vec{b}$ et $\vec{z}^{-} = \vec{v} - \vec{b}$ (§ 2.3), les termes non linéaires font intervenir conjointement $\vec{z}^{+}$ et $\vec{z}^{-}$ et les seules corrélations triples à considérer dans l'espace de Fourier sont donc du type $\langle z^{+}_{\vec{p}}\, z^{-}_{\vec{q}}\, z^{+}_{\vec{k}} \rangle$ ou $\langle z^{+}_{\vec{p}}\, z^{-}_{\vec{q}}\, z^{+}_{\vec{k}} \rangle (\vec{k} = \vec{p} + \vec{q})$ car des corrélations triples telles que $\langle z^{+}_{\vec{p}}\, z^{+}_{\vec{q}}\, z^{-}_{\vec{k}} \rangle$ n'interviennent pas dans la dynamique du transfert d'énergie. Nous avons vu qu'en présence d'un champ magnétique à grande échelle $\vec{B}$, $\vec{z}^{+}$ et $\vec{z}^{-}$ sont solutions des équations (§ 2.3)

$$\frac{dz^{+}_{\vec{k}}}{dt} = + i\vec{k}\cdot\vec{B}\, z^{+}_{\vec{k}} \quad , \tag{4.2}$$

$$\frac{dz^{-}_{\vec{k}}}{dt} = - i\vec{k}\cdot\vec{B}\, z^{-}_{\vec{k}} \quad , \tag{4.3}$$

pour des nombres d'ondes k hors de la zone d'injection d'énergie et de la zone de dissipation. On obtient donc :

$$\frac{d}{dt}\left(z^{+}_{\vec{p}}\, z^{-}_{\vec{q}}\, z^{+}_{\vec{k}}\right) = - 2i\, \vec{q}\cdot\vec{B}\left(z^{+}_{\vec{p}}\, z^{-}_{\vec{q}}\, z^{+}_{\vec{k}}\right) \quad , \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(z^{+}_{\vec{p}}\, z^{-}_{\vec{q}}\, z^{-}_{\vec{k}}\right) = + 2i\, \vec{p}\cdot\vec{B}\left(z^{+}_{\vec{p}}\, z^{-}_{\vec{q}}\, z^{-}_{\vec{k}}\right) \quad . \tag{4.5}$$

Si maintenant $\vec{B}$ est un champ magnétique uniforme aléatoire gaussien, de valeur moyenne nulle, alors

$$\langle e^{i\vec{k}\cdot\vec{B}t} \rangle = \exp\left[- \tfrac{1}{2} \langle (\vec{k}\cdot\vec{B})^2 \rangle t^2 \right] \quad , \tag{4.6}$$

et si $\vec{B}$ est de plus isotrope, de dispersion b_o,

$$\langle e^{i\vec{k}\cdot\vec{B}t} \rangle = \exp\left(- 1/6\, k^2 b_o^2\, t^2\right) \quad . \tag{4.7}$$

Appliquant ce résultat à (4.4) et (4.5) sous forme intégrée, on trouve que les champs magnétiques aléatoires à grande échelle font relaxer les corrélations triples avec un taux de l'ordre de kb_o où b_o est la vitesse caractéristique d'Alfvén. Nous pouvons ainsi définir un taux d'amortissement turbulent par effet Alfvén

$$\mu_k^A = kb_o = k\sqrt{\int_o^k E_k^M \, dk} \quad , \tag{4.8}$$

dans lequel l'intégrale sur le spectre d'énergie est prise uniquement de 0 à k car seuls les tourbillons de dimensions supérieures à 1/k peuvent être considérés comme responsables d'ondes d'Alfvén (d'échelles inférieures à 1/k). L'amortissement des corrélations triples sera donné par le taux résultant

$$\mu_{kpq}^A = \mu_k^A + \mu_p^A + \mu_q^A \, . \tag{4.9}$$

L'action de la force de Lorentz est aussi source d'amortissement turbulent qui agit de façon analogue au cisaillement hydrodynamique et le taux correspondant pour le mode k sera (cf. équ. 3.19)

$$\lambda_k = \sqrt{\int_o^k q^2 E_q^M \, dq} \, . \tag{4.10}$$

Enfin, le terme linéaire de dissipation par diffusivité magnétique λ est source, comme la viscosité, d'amortissement des corrélations triples. Nous supposerons indépendants les effets de dissipation (cinétique, magnétique) et les effets d'amortissement turbulent (cisaillement turbulent et effet Alfvén), les taux seront combinés additivement et nous prendrons

$$\mu_{kpq} = \mu_k + \mu_p + \mu_q \quad , \tag{4.11}$$

avec

$$\mu_k = (\nu + \lambda)k^2 + C_S\left(\int_o^k q^2(E^V + E^M)dq\right)^{\frac{1}{2}} + C_A\left(\int_o^k E_q^M \, dq\right)^{\frac{1}{2}} \, . \tag{4.12}$$

Les coefficients C_S et C_A sont des constantes ajustables de l'ordre de 1. Le coefficient C_S a été choisi de façon à obtenir une constante de Kolmogorov égale à 1,4, dans le cas non magnétique et la constante C_A a été prise égale à $1/\sqrt{6}$ (équ. 4.7).

Finalement, nous mentionnons qu'au moins en principe le modèle du champ d'épreuve (TFM) permet de déterminer sans ambiguité les taux de ralaxation. Néanmoins, le TFM dans la forme introduite originalement par Kraichnan (1971 a) ne peut donner l'effet Alfvén puisque les effets non locaux sont supprimés pour conserver l'invariance galiléenne. Ce défaut, pour être corrigé, demanderait l'inclusion de nouvelles équations et l'ensemble formerait un système trop complexe (par rapport au TFM de Kraichnan, il faut ajouter les nouveaux degrés de liberté que constituent le champ magnétique et l'hélicité).

4.3 Les équations de la turbulence MHD homogène, isotrope, hélicitaire.

Les équations spectrales dans l'approximation de l'amortissement turbulent ont été établies au § 3.4 pour des équations à non linéarité quadratique du type

$$\frac{\partial X^a}{\partial t} = L^a_{bc} \, X^b \, X^c \quad , \tag{4.13}$$

où l'opérateur L^a_{bc} doit être symétrique

$$L^a_{bc} = L^a_{cb} \quad . \tag{4.14}$$

En notant X^V et X^M les composantes de Fourier du champ de vitesse et du champ magnétique, les équations de la MHD (2.24-2.25) s'écrivent symboliquement (pour un fluide parfait sans forces extérieures)

$$\frac{\partial}{\partial t} X^V = L^V_{VV} \, X^V X^V + L^V_{MM} \, X^M X^M \quad , \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X^M = L'^M_{VM} \, X^V X^M \quad , \tag{4.16}$$

où L^V_{VV} et L^V_{MM} sont symétriques

$$L^V_{VV} = L\begin{pmatrix} V & V & V \\ \vec{k} & \vec{p} & \vec{q} \\ 1 & m & n \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \, P_{lmn}(k) \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \quad , \tag{4.17}$$

$$L^V_{MM} = L\begin{pmatrix} V & M & M \\ \vec{k} & \vec{p} & \vec{q} \\ 1 & m & n \end{pmatrix} = - L^V_{VV} \tag{4.18}$$

Quant à L'^M_{VM}, il peut être considéré comme la somme de deux opérateurs symétriques :

$$L'^M_{VM} = L^M_{VM} + L^M_{MV} \quad , \tag{4.19}$$

avec :

$$L^{M}_{VM} = L\begin{pmatrix} M & V & M \\ \vec{k} & \vec{p} & \vec{q} \\ l & m & n \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \Delta_{lmn} \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} , \tag{4.20}$$

$$L^{M}_{VM} = L\begin{pmatrix} M & M & V \\ \vec{k} & \vec{p} & \vec{q} \\ l & m & n \end{pmatrix} = - L^{M}_{VM} . \tag{4.21}$$

Dans les expressions (4.17-18) et (4.20-21), les opérateurs suivants ont été utilisés :

$$P_{lmn}(k) = k_m P_{ln}(k) + k_n P_{lm}(k) , \tag{4.22}$$

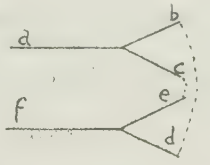
$$P_{ln}(k) = \delta_{ln} - \frac{k_l k_n}{k^2} , \tag{4.23}$$

$$\Delta_{lmn} = k_m \delta_{ln} - k_n \delta_{lm} , \tag{4.24}$$

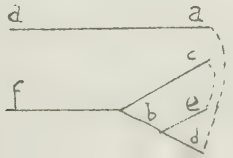
δ_{ln} = Symbole de Kronecker ,

$\sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}}$:= somme sur tous les vecteurs d'ondes $\vec{p},\vec{q}$ tels que $\vec{p}+\vec{q} = \vec{k}$.

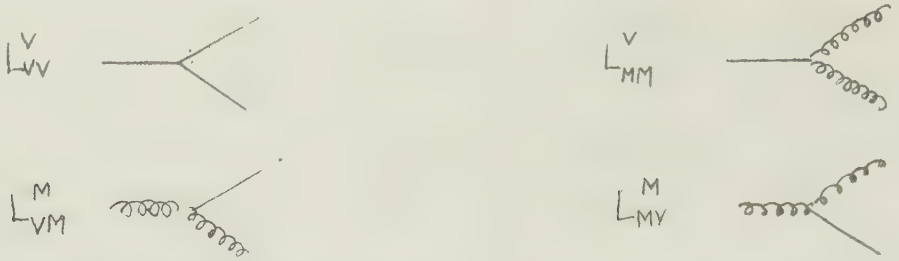
Chacun des trois termes des équations spectrales (3.29) fait intervenir le produit de deux opérateurs et de deux covariances. Or nous avons ici quatre opérateurs différents et chaque covariance est formée d'une partie scalaire et d'une partie pseudo-scalaire (équs.2.40-42). Il en résulte un nombre considérable de termes qu'il est préférable de classer en utilisant une représentation en diagrammes. Ces diagrammes ne sont en aucune manière issus d'un développement formel et ne servent qu'à clarifier l'algèbre. En représentant L^a_{bc} par $a \prec \begin{matrix} b \\ c \end{matrix}$ et $< bd >$ par une ligne pointillée entre b et d : b.....d, un terme tel que $L^a_{bc}\ L^f_{ed}\ < bd > < ce >$ sera représenté par le diagramme



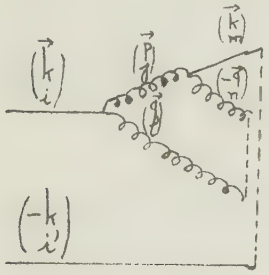
tandis que $L^f_{cb}\ L^b_{ed}\ < ad > < ce >$ sera représenté par



Les quatre opérateurs L peuvent être représentés de façon plus détaillée



Donnons un exemple de diagramme complet :



représente $L\begin{pmatrix} V & V & V \\ \vec{k} & \vec{p} & \vec{q} \\ i & j & l \end{pmatrix} L\begin{pmatrix} M & V & M \\ \vec{p} & \vec{k} & -\vec{q} \\ j & m & n \end{pmatrix} \langle v_m(\vec{k}) v_i(-\vec{k}) \rangle \langle b_l(\vec{q}) b_n(-\vec{q}) \rangle$

Les 3x12 diagrammes correspondant aux équations spectrales pour $\langle vv \rangle$, $\langle vb \rangle$ et $\langle bb \rangle$ sont donnés à l'Appendice A2. Chacun d'eux correspond à quatre termes à calculer dans le cas de turbulence avec hélicité puisqu'ils comportent un produit de deux tenseurs de corrélation qui sont composés d'une partie non hélicitaire (U) et d'une partie hélicitaire ($\tilde{U}$). Dans le cas général, le nombre total de termes à calculer serait donc de 3x12x4 = 144, ce qui représenterait un travail particulièrement fastidieux. Or nous nous intéressons principalement au problème de la croissance du champ magnétique à partir d'un germe initial infinitésimal et l'on supposera que ce champ initial est statistiquement invariant par renversement du champ magnétique $\vec{b} \rightarrow -\vec{b}$ et donc que $\langle \vec{b} \rangle = 0$, $\langle vb \rangle = 0$. Comme les équations de la MHD sont aussi invariantes par cette transformation, il en résulte que le champ moyen et les corrélations $\langle vb \rangle$ resteront toujours nulles.

Avec cette hypothèse, il ne reste plus que 6 diagrammes pour chacune des deux corrélations $\langle vv \rangle$ et $\langle bb \rangle$, c'est-à-dire 2x6x4=48 termes à calculer.

Chacun de ces termes est le produit d'une expression algébrique en k,p,q par un terme bilinéaire en U, par exemple $U_p^V U_q^V$ ou $U_k^V U_q^M$. Ces derniers termes peuvent s'exprimer en fonction des densités spectrales d'énergie (cinétique ou magnétique) et d'hélicité (cinétique ou magnétique) à l'aide des équations (2.43-44) et on obtient quatre équations couplées pour E_k^V, E_k^M, H_k^V et H_k^M. La viscosité et la diffusivité magnétiques sont pris en compte facilement et on suppose qu'il y a des forces extérieures qui sont susceptibles d'injecter de l'hélicité et de l'énergie cinétiqueset magnétiques. Soient F_k^V, $\tilde{F}_\kappa^V$, F_k^M, $\tilde{F}_k^M$ les densités spectrales d'injection d'énergie et d'hélicité cinétiques, d'énergie et d'hélicité magnétiques. Les conditions de réalisabilité (2.48-49) imposent :

$$\tilde{F}_k^V \leq k F_k^V \tag{4.25}$$

$$\tilde{F}_k^M \leq F_k^M/k \tag{4.26}$$

Les équations de la turbulence MHD homogène, isotrope hélicitaire s'écrivent finalement :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2)E_k^V = F_k^V + \int_{\Delta_k} dpdq\ \Theta_{kpq}\ (T_{VV}^V + T_{V\tilde{V}}^V + T_{VM}^V + T_{MM}^V + T_{M\tilde{M}}^V)\ , \tag{4.27}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2)H_k^V = \tilde{F}_k^V + \int_{\Delta_k} dpdq\ \Theta_{kpq}\ (T_{V\tilde{V}}^{\tilde{V}} + T_{VM}^{\tilde{V}} + T_{M\tilde{M}}^{\tilde{V}})\ , \tag{4.28}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda k^2)E_k^M = F_k^M + \int_{\Delta_k} dpdq\ \Theta_{kpq}\ (T_{VM}^M + T_{V\tilde{M}}^M + T_{MM}^M + T_{M\tilde{M}}^M)\ , \tag{4.29}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda k^2)H_k^M = \tilde{F}_k^M + \int_{\Delta_k} dpdq\ \Theta_{kpq}\ (T_{V\tilde{M}}^{\tilde{M}} + T_{VM}^{\tilde{M}} + T_{M\tilde{M}}^{\tilde{M}})\ . \tag{4.30}$$

Dans ces expressions

$$\Theta_{kpq}(t) = \int_o^t dt\ \exp - \int_\tau^t \mu_{kpq}(s)\ ds\ , \tag{4.31}$$

$$\mu_{kpq} = \mu_k + \mu_p + \mu_q \tag{4.32}$$

$$\mu_k = (\nu + \lambda)k^2 + C_S(\int_o^k q^2(E_q^V + E_q^M)dq)^{\frac{1}{2}} + C_A k(\int_o^k E_q^M dq)^{\frac{1}{2}} \tag{4.33}$$

$$T^V_{VV} = \frac{k}{pq} b_{kpq} (k^2 E^V_p E^V_q - p^2 E^V_k E^V_q) \tag{4.34}$$

$$T^V_{\tilde{V}\tilde{V}} = - \frac{1}{pq^2} c_{kpq} k^2 H^V_p H^V_q - p^2 H^V_k H^V_q) \tag{4.35}$$

$$T^V_M = - \frac{kp}{q} c_{kpq} E^V_k E^M_q \tag{4.36}$$

$$T^V_{MM} = \frac{k^3}{pq} c_{kpq} E^M_p E^M_q \tag{4.37}$$

$$T^V_{\tilde{M}\tilde{M}} = - \tfrac{1}{2} \frac{k^3 q}{p} h_{kpq} H^M_p H^M_q \tag{4.38}$$

$$T^{\tilde{V}}_{V\tilde{V}} = \frac{k}{pq} b_{kpq} (k^2 H^V_p E^V_q - p^2 H^V_k E^V_q) - \frac{pk^2}{q^2} c_{kpq} (E^V_p H^V_q - E^V_k H^V_q) \tag{4.39}$$

$$T^{\tilde{V}}_{V\tilde{M}} = - \frac{kp}{q} c_{kpq} H^V_k E^M_q \tag{4.40}$$

$$T^{\tilde{V}}_{M\tilde{M}} = \frac{k^4}{q} f_{kpq} H^M_p E^M_q \tag{4.41}$$

$$T^M_{VM} = \frac{k^5}{p^3 q} c_{kpq} E^V_p E^M_q + \frac{k}{pq} h_{kpq} (k^2 E^M_p E^V_q - p^2 E^M_k E^V_q) \tag{4.42}$$

$$T^M_{\tilde{V}\tilde{M}} = \frac{kq}{p} h_{kpq} (\frac{k^2}{p^2} H^V_p H^M_q - \frac{p^2}{q^2} H^M_k H^V_q) \tag{4.43}$$

$$T^M_{MM} = - \frac{k^3}{pq} c_{kpq} E^M_k E^M_q \tag{4.44}$$

$$T^M_{\tilde{M}\tilde{M}} = kp^2 e_{kpq} H^M_k H^M_q \tag{4.45}$$

$$T^{\tilde{M}}_{V\tilde{M}} = \frac{k}{pq} h_{kpk} (k^2 H^M_p E^V_q - p^2 H^M_k E^V_q) \tag{4.46}$$

$$T^{\tilde{M}}_{\tilde{V}M} = \frac{k}{pq} h_{kpq} (\frac{k^2}{p^2} H^V_p E^M_q - \frac{p^2}{k^2} E^M_k H^V_q) \tag{4.47}$$

$$T^{\tilde{M}}_{M\tilde{M}} = \frac{p^2}{k} e_{kpq} E^M_k H^M_q - \frac{kp}{q} j_{kpq} H^M_k E^M_q \tag{4.48}$$

Les coefficients géométriques b_{kpq}, c_{kpq}, h_{kpq} et j_{kpq} sont les mêmes que ceux de Kraichnan et Nagarajan (1967) et deux nouveaux coefficients sont introduits, e_{kpq} et f_{kpq}.

$$b_{kpq} = \frac{p}{k}(xy + z^3) \tag{4.49}$$

$$c_{kpq} = \frac{p}{k}\, z(1 - y^2) = z(x + yz) \tag{4.50}$$

$$h_{kpq} = \frac{p}{k}(z + xy) = 1 - y^2 \tag{4.51}$$

$$j_{kpq} = \frac{p}{k}\, z(1 - x^2) \tag{4.52}$$

$$e_{kpq} = x(1 - z^2) \tag{4.53}$$

$$f_{kpq} = z - xy - 2\,zy^2 \tag{4.54}$$

x, y, z sont les cosinus des angles intérieurs du triangle $\vec{k}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ (cf. Appendice A2). Le terme T^V_{VV} correspond au cas non magnétique, non hélicitaire (Orszag, 1970 ; 1974). Les termes $T^V_{\widetilde{VV}}$ et $T^{\widetilde{V}}_{V\widetilde{V}}$ apparaissent dans le cas hélicitaire non magnétique (Lesieur, 1973 ; André & Lesieur, 1975). Kraichnan et Nagarajan (1967) et Nagarajan (1970) donnent T^V_{VM}, T^V_{MM}, T^M_{VM} et T^M_{MM} pour la turbulence magnétique non hélicitaire. Les autres termes sont dus à la présence d'hélicité dans le cas de turbulence magnétique.

La conservation de l'énergie totale ou de l'hélicité magnétique se vérifie facilement par permutation de k, p et q à l'intérieur des intégrales portant sur ces trois nombres d'ondes. On vérifie, par exemple, que

$$\int dkdpdq \quad \Theta_{kpq}\; T^{\widetilde{M}}_{\widetilde{MM}} = 0$$

en permutant q et k dans une des deux intégrandes. Pour cela on utilise des relations trigonométriques vérifiées par les coefficients géométriques et qui sont données en Appendice A2. Telles quelles, les équations spectrales 4.27-30 apparaissent aussi complexes, sinon plus, que les six équations de départ de la MHD (2.1-2). En réalité leur étude est bien plus simple : c'est ainsi que la plupart des problèmes mathématiques ouverts sur l'équation de Navier-Stokes (§ 2.1) sont résolus dans le cadre des équations spectrales (Penel, 1975).

Nous avons aussi vu que ce type d'équations se prêtait bien au calcul numérique. Ici nous ne nous intéressons pas particulièrement à leurs propriétés mathématiques mais plutôt à leurs conséquences physiques et plus précisément à la génération d'énergie magnétique à grande échelle à partir d'énergie cinétique à petite échelle. Nous montrerons d'abord l'existence d'effets non locaux caractéristiques de la turbulence MHD, dus aux interactions entre des échelles différentes.

4.4 Effets non locaux.

4.4.1 Les équations non locales.

On considère l'effet sur le mode k de l'interaction avec des modes p,q ($\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}$) lorsqu'on se trouve dans un des deux cas suivants (triangles très aplatis) :

i) $q \ll k \simeq p$ ou $p \ll k \simeq q$

ii) $k \ll q \sim p$

Les champs magnétiques à grande échelle entraînant l'apparition d'ondes d'Alfvén à petite échelle (§ 2.3), des effets non locaux du type (i) sont possibles, tandis que les résultats de Steenbeck, Krause, Rädler (1966) et de Moffat (1970 a et b) concernant l'effet de l'hélicité à petite échelle sur le champ magnétique à grande échelle incitent à rechercher des effets du type (ii). Les effets non locaux sont trouvés de façon systématique par des développements dans les triangles aplatis. Soit A un paramètre de développement grand par rapport à 1 : le cas (i) correspond à $q \leq k/A$ ou $p \leq k/A$ tandis que (ii) correspond à $q \geq Ak$: les intégrales des équations spectrales 4.27-30 sont développées en puissance de 1/A dans un des deux cas ci-dessus (les développements des coefficients géométriques sont donnés en Appendice A2). Les intégrales doubles (sur p et q) se réduisent à des intégrales simples en passant en coordonnées polaires (par exemple q et β si $q \ll k$). Les calculs ont été faits jusqu'à l'ordre 1/A inclus mais le temps de mémoire Θ_{kpq} n'a pas été développé par suite de la complexité de μ_{kpq} (équs. 4.32-33).

Effet des grandes échelles :

Les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial E_k^V}{\partial t} = - k \Gamma_k (E_k^V - E_k^M) - \tilde{\Gamma}_k k^2 H_k^M + O(A^{-2}) \quad , \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial E_k^M}{\partial t} = k \Gamma_k (E_k^V - E_k^M) + \tilde{\Gamma}_k H_k^V + O(A^{-2}) \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial H_k^V}{\partial t} = - k \Gamma_k (H_k^V - k^2 H_k^M) - \tilde{\Gamma}_k k^2 E_k^M + O(A^{-2}) \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial H_k^M}{\partial t} = \frac{\Gamma_k}{k} (H_k^V - k^2 H_k^M) + \tilde{\Gamma}_k E_k^V + O(A^{-2}) \tag{4.58}$$

avec

$$\Gamma_k = \frac{4}{3} k \int_0^{k/A} \Theta_{kkq} E_q^M \, dq \quad , \quad \tilde{\Gamma}_k = \frac{4}{3} \int_0^{k/A} \Theta_{kkq} q^2 H_q^M \, dq \tag{4.59}$$

Γ_k et $\tilde{\Gamma}_k$ ont la dimension d'une vitesse. Comme $q H_k^M \leq E_k^M$,

$$|\tilde{\Gamma}_k| \leq \frac{1}{A} \Gamma_k \tag{4.60}$$

Effet des petites échelles

On obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^V = 0 - 2(\frac{\nu^V}{5} + \nu^M) k^2 E_k^V + O(A^{-2}) \quad , \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^M = - \alpha_k^R k^2 H_k^M - 2\nu^V k^2 E_k^M + O(A^{-2}) \quad , \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^V = 0 - 2(\frac{\nu^V}{5} + \nu^M) k^2 H_k^V + O(A^{-2}) \quad , \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^M = - \alpha_k^R E_k^M - 2\nu^V k^2 H_k^M + O(A^{-2}) \quad , \tag{4.64}$$

où

$$\alpha_k^R = \alpha_k^V - \alpha_k^M \quad , \tag{4.65}$$

$$\alpha_k^V = \frac{4}{3} \int_{Ak}^{\infty} \Theta_{kqq} H_q^V \, dq \quad , \tag{4.66}$$

$$\alpha_k^M = \frac{4}{3} \int_{Ak}^{\infty} \Theta_{kqq}\, q^2\, H_q^M\, dq \quad , \tag{4.67}$$

$$\nu_k^V = \frac{8}{3} \int_{Ak}^{\infty} \Theta_{kqq}\, E_q^V\, dq \quad , \tag{4.68}$$

$$\nu_k^M = \frac{8}{3} \int_{Ak}^{\infty} \Theta_{kqq}\, E_q^M\, dq \quad . \tag{4.69}$$

Les coefficients α_k^V, α_k^M et α_k^R, appelés coefficients α cinétique, magnétique et résiduel (ou coefficients de torsalité, cf. Appendice A3) ont la dimension d'une vitesse ; les coefficients ν_k^V, ν_k^M ont la dimension d'un coefficient de diffusion et ils sont appelés coefficients de diffusivité turbulente cinétique et magnétique. Les coefficients ν sont des scalaires alors que les coefficients α, comme les hélicités, sont des pseudoscalaires.

Le caractère local des interactions purement hydrodynamiques apparaît nettement dans les équations (4.61) et (4.63) puisqu'en l'absence de champ magnétique, les termes d'ordre zéro sont nuls. Les différents coefficients Γ, α et ν sont appelés "coefficients de transport turbulent". Nous allons montrer séparément les différents effets non locaux qui leur sont associés.

4.4.2 Effet Alfvén.

A l'ordre zéro les termes décrivant les interactions avec les grandes échelles s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^V = - k \Gamma_k \, (E_k^V - E_k^M) \quad , \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^M = k \Gamma_k \, (E_k^V - E_k^M) \quad , \tag{4.71}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^V = - k \Gamma_k \, (H_k^V - k^2 H_k^M) \quad , \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^M = \frac{\Gamma_k}{k} \, (H_k^V - k^2 H_k^M) \quad , \tag{4.73}$$

où Γ_k est donné par l'équation (4.59). Si l'on définit l'énergie et l'hélicité résiduelles par

$$E_k^R = E_k^V - E_k^M \quad , \tag{4.74}$$

$$H_k^R = H_k^V - k^2 H_k^M \quad , \tag{4.75}$$

on obtient les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^R = - 2k\Gamma_k E_k^R \quad , \tag{4.76}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^R = - 2k \Gamma_k H_k^R \quad , \tag{4.77}$$

qui montrent que E_k^R et H_k^R relaxent exponentiellement vers zéro en un temps de l'ordre de $\frac{1}{k\Gamma_k}$. Lorsque l'essentiel de l'énergie magnétique se trouve dans les échelles très supérieures à k^{-1}, le taux d'amortissement turbulent se réduit à

$$\mu_k^A = k \left(\int_o^k E_q^M \, dq \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{4.78}$$

donc

$$\Theta_{kkq} \simeq 1/2 \mu_k^A \quad , \tag{4.79}$$

soit

$$\Gamma_k \simeq \frac{2}{3} \left(\int_o^k E_q^M \, dq \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{4.80}$$

et le coefficient de transport Γ_k est donc de l'ordre de b_o, la vitesse d'Alfvén associée à l'énergie magnétique à grande échelle.

La relaxation vers l'équipartition des énergies et hélicités est due, ainsi que l'a expliqué Kraichnan (1965) à des ondes d'Alfvén se propageant dans un champ magnétique à grande échelle aléatoire isotrope, d'où le nom d'effet Alfvén qui lui est donné ici.

Les termes en $\tilde{\Gamma}_k$ sont une correction du premier ordre à l'effet Alfvén, due à l'hélicité magnétique à grande échelle.

4.4.3 Les effets α cinétique et magnétique et leur interprétation phénoménologique.

A l'ordre zéro les termes exprimant l'effet des petites échelles sur les grandes s'écrivent :

$$\frac{\partial E_k^V}{\partial t} = 0 \quad , \tag{4.81}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^M = - \alpha_k^R \, k^2 \, H_k^M \, , \tag{4.82}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^V = 0 \quad , \tag{4.83}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^M = - \alpha_k^R \, E_k^M \quad , \tag{4.84}$$

où le coefficient α_k^R est donné par

$$\alpha_k^R = \frac{4}{3} \int_{Ak}^{\infty} dq \, \Theta_{kqq} \, (H_q^V - q^2 \, H_q^M) \, . \tag{4.85}$$

Les équations (4.82) et (4.84) se séparent en

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_k^M + k \, H_k^M) = - k \alpha_k^R \, (E_k^M + k \, H_k^M) \quad , \tag{4.86}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_k^M - k \, H_k^M) = + k \alpha_k^R \, (E_k^M - k \, H_k^M) \quad . \tag{4.87}$$

Quel que soit le signe du pseudoscalaire α_k^R et pour toute condition initiale telle que

$$k \, H_k^M / E_k^M \neq \mathrm{Sgn} \, (\alpha_k^M) \quad , \tag{4.88}$$

l'énergie et l'hélicité magnétique vont croître exponentiellement avec un taux caractéristique de l'ordre de $k \left| \alpha_k^R \right|$. Le coefficient α_k^R dépend essentiellement de l'hélicité résiduelle à petite échelle $H_q^R = H_q^V - q^2 H_q^M$. Nous pouvons conclure que l'hélicité résiduelle à petite échelle destabilise (amplifie) l'énergie et l'hélicité magnétiques à grande échelle. Ce phénomène généralise l'effet α de Steenbeck, Krause & Rädler (1966) et "l'helicity effect" de Moffatt (1970) en y incluant la contribution de l'hélicité magnétique, découverte par A. Pouquet (se reporter au § 4.4.6 pour une comparaison plus détaillée avec les résultats d'autres auteurs).

On peut expliquer l'effet α magnétique sur une base phénoménologique. Supposons à l'instant t_o un champ magnétique hélicitaire à petite échelle, pas d'excitation cinétique et un champ magnétique à grande échelle $\vec{B}$, tel que $B \gg b$. On suppose que les échelles de $\vec{b}$ et $\vec{B}$ sont bien séparées (à l'échelle de $\vec{b}$, le champ B peut être considéré comme uniforme).

Dans l'équation de Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} + \vec{b}) = -\nabla \wedge \vec{E} \quad , \tag{4.89}$$

le champ électrique est donné, à la limite de la conductivité infinie par

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge (\vec{b} + \vec{B}) \quad . \tag{4.90}$$

Dans l'équation donnant la vitesse, c'est la force de Lorentz qui va être le terme dominant

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{b} \quad , \tag{4.91}$$

et il n'y a pas de terme de pression puisque $\nabla \cdot (B \nabla)\vec{b} \simeq 0$.

En intégrant cette équation à partir de t_o, on obtient

$$\vec{v}(t) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \int_{t_o}^{t} \vec{b}(\tau) d\tau \, . \tag{4.92}$$

On suppose

$$\langle \vec{b} \rangle = 0 \tag{4.93}$$

et on prend d'abord la moyenne de (4.90) sur les petites échelles (opération notée $\langle \; \rangle_{pe}$)

$$\langle \vec{E} \rangle_{pe} = \int_{t_o}^{t} \langle \vec{b}(t) \wedge \vec{B} \cdot \nabla \vec{b}(\tau) \rangle_{pe} \, d\tau \quad , \tag{4.94}$$

soit

$$\langle E_m \rangle_{pe} = \varepsilon_{ijm} \int_{t_o}^{t} \langle b_i(t) \frac{\partial}{\partial r_l} b_j(\tau) \rangle_{pe} d\tau \, B_l \quad , \tag{4.95}$$

mais en turbulence homogène isotrope,

$$\langle b_i(t) \frac{\partial}{\partial r_l} b_j(\tau) \rangle = \frac{\varepsilon_{ijl}}{6} \langle \vec{b}(t) \cdot \nabla \wedge \vec{b}(\tau) \rangle \quad , \tag{4.96}$$

et donc

$$\langle \vec{E} \rangle_{pe} = +\frac{1}{3} \int_{t_o}^{t} d\tau \langle \vec{b}(t) \cdot \nabla \wedge \vec{b}(\tau) \rangle_{pe} \vec{B} \quad , \tag{4.97}$$

$$\langle \vec{E} \rangle_{pe} \simeq + \frac{1}{3} \tau \langle \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \rangle_{pe} \vec{B} \quad , \tag{4.98}$$

où τ est un temps de corrélation typique.

En revenant maintenant aux moyennes (non conditionnelles) $\langle \ \rangle$, le coefficient de proportionnalité entre $\langle \vec{E} \rangle$ et $\langle \vec{B} \rangle$ est

$$\alpha_o^M = \frac{1}{3} \tau \langle \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \rangle \quad , \tag{4.99}$$

et on obtient l'équation d'évolution du champ moyen

$$\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} = \alpha_o^M \nabla \wedge \langle \vec{B} \rangle \tag{4.100}$$

Cette équation s'intègre aisément par ttansformation de Fourier, donnant des solutions croissant exponentiellement avec un taux caractéristique de l'ordre de $k \left| \alpha_o^M \right|$ pour le mode k et l'on retrouve la destabilisation par l'hélicité magnétique. Pour comparer les deux coefficients α_k^M (équ. 4.67) et α_o^M, on remarque que

$$\langle \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \rangle = -2 \int_o^\infty q^2 \, H_q^M \, dq \quad , \tag{4.101}$$

et on prend τ (équ. 4.99) de l'ordre du temps de relaxation des corrélations triples dans les petites échelles.

On peut par le même genre d'arguments expliquer l'effet α <u>cinétique</u> en supposant un champ de vitesse hélicitaire à petite échelle, pas d'excitation magnétique et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ tel que $B \gg v$.

On part cette fois-ci de

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \simeq (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} \quad , \tag{4.102}$$

et on se sert encore de la relation

$$\vec{E} = - \vec{v} \wedge (\vec{b} + \vec{B}) \quad , \tag{4.103}$$

On aboutit à une relation de la forme (4.100) avec un coefficient α_o^V remplaçant α_o^M.

Remarque : Le taux d'amortissement turbulent est-il modifié par l'effet α ? L'effet de destabilisation des hélicités à petite échelle sur les champs magnétiques à grande échelle pourrait également être responsable d'une déstabilisation des corrélations triples et il faudrait dans ce cas ajouter un terme supplémentaire négatif dans l'expression de $\mathcal{M}_{kpq}$ (équ. 4.11-12). Une étude de ce problème ne peut être envisagée que dans le cadre du T.F.M. de Kraichnan (1971 a ; cf. § 4.2).

4.4.4 Diffusivité cinétiques et magnétiques.

Les effets des petites échelles sur les grandes échelles sont décrits à l'ordre un par les équations (tirées de 4.61-64)

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^V = - 2 \left(\frac{1}{5} \nu_k^V + \nu_k^M\right) k^2 E_k^V \quad , \tag{4.104}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k^M = - 2 \nu_k^V k^2 E_k^M \quad , \tag{4.105}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^V = - 2\left(\frac{1}{5} \nu_k^V + \nu_k^M\right) k^2 H_k^V \quad , \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^M = - 2 \nu_k^V k^2 H_k^M \tag{4.107}$$

où ν_k^V et ν_k^M sont donnés par les équations (4.68) et (4.69).

Les coefficients ν sont évidemment des diffusivités turbulentes. Il est intéressant de remarquer que la diffusivité magnétique est présente dans les équations pour les quantités cinétiques mais pas dans les équations magnétiques. Ce résultat peut encore être retrouvé d'une façon élémentaire en supposant qu'à un instant t_o un courant uniforme $\vec{J}$ est placé dans une turbulence magnétique à petite échelle. A l'ordre le plus bas

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{J} \wedge \vec{b} - \nabla p \tag{4.108}$$

Le terme de pression ne peut pas être omis ici car $\vec{J} \wedge \vec{b}$ n'est pas à divergence nulle. Si toutefois $\vec{a}$ est le potentiel vecteur de $\vec{b}$, en utilisant la relation

$$\nabla(\vec{J}.\vec{a}) = (\vec{J}.\nabla)\vec{a} + \vec{J} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad , \tag{4.109}$$

on obtient

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - (\vec{J}.\nabla)\vec{a} \quad , \tag{4.110}$$

qui ne nécessite pas de terme de pression si l'on prend div $\vec{a} = 0$, ce qui est toujours possible.

En intégrant (4.110) et en utilisant le loi d'Ohm, on obtient le champ électrique

$$\vec{E}(t) = - \int_{t_o}^{t} \left[(\vec{J}.\nabla)\vec{a}(\tau) \wedge \vec{b}(t) \right] d\tau. \tag{4.111}$$

On vérifie aisément à l'aide de la transformation de Fourier par exemple, que le rotationnel de $\vec{E}(t)$ est nul et donc qu'il n'y a pas contribution à $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, c'est-à-dire que la turbulence magnétique à petite échelle ne contribue pas à la diffusion du champ magnétique à grande échelle.

4.4.5 Effets non locaux et lois de conservation.

Nous savons que l'énergie totale et l'hélicité magnétique sont conservées pour toute triade k, p, q en interaction (§ 2.4) et il est intéressant de voir si ces propriétés de conservation restent satisfaites à chaque ordre du développement des équations non locales. On vérifie sur les équations (4.58) et (4.64) que l'hélicité magnétique est conservée lorsque les termes d'ordre zéro (Alfvén et α) sont combinés sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k^M = \frac{\Gamma_k}{k} (H_k^V - k^2 H_k^M) - \alpha_k^R E_k^M \quad . \tag{4.112}$$

Pour le vérifier, on intègre sur k de 0 à l'infini en utilisant les expressions (4.59) et (4.65-67) de Γ_k et α_k^R.

On obtient une propriété de conservation analogue au premier ordre.

En ce qui concerne l'énergie totale, les termes Alfvén d'ordre zéro la conservent (équs. 4.55-56), par contre le terme α d'ordre zéro doit être combiné avec les termes Alfvén d'ordre un pour obtenir la propriété de conservation voulue. Finalement, si l'on veut assurer la conservation à la fois de l'énergie totale et de l'hélicité magnétique en retenant les termes non locaux à l'ordre le plus bas possible, il faut utiliser le système suivant (système des équations non locales)

$$\frac{\partial E_k^V}{\partial t} = - k \Gamma_k (E_k^V - E_k^M) - \tilde{\Gamma}_k k^2 H_k^M \quad , \tag{4.113}$$

$$\frac{\partial E_k^M}{\partial t} = k \Gamma_k (E_k^V - E_k^M) + \tilde{\Gamma}_k H_k^V - \alpha_k^R k^2 H_k^M \quad , \tag{4.114}$$

$$\frac{\partial H_k^V}{\partial t} = - k \Gamma_k (H_k^V - k^2 H_k^M) \quad , \tag{4.115}$$

$$\frac{\partial H_k^M}{\partial t} = \frac{\Gamma_k}{k} (H_k^V - k^2 H_k^M) - \alpha_k^R E_k^M \quad . \tag{4.116}$$

4.4.6 Sur l'expression des coefficients α.

L'expression de α_k^V peut utilement être comparée à des expressions analogues données par d'autres auteurs. C'est Parker (1955) qui a eu le premier l'idée d'avoir recours à des "mouvements cycloniques" de courte durée pour régénérer un champ poloïdal à partir d'un champ toroïdal, phénomène qui ne peut se produire si le champ de vitesse possède une trop grande symétrie comme le montrent de nombreux théorèmes anti-dynamos (voir aussi Parker, 1970). L'application de cette idée pour un champ de vitesse turbulent caractérisé par son tenseur de corrélation des vitesses est due à Steenbeck; Krause & Rädler (1966) qui trouvent un coefficient α (équ. 20, p. 153 de la traduction de Roberts et Stix, 1971),

$$\alpha^V = \frac{1}{3} \tau \langle \vec{v} . \nabla \wedge \vec{v} \rangle = \frac{2}{3} \tau \int_0^\infty H_q^V \, dq \tag{4.117}$$

où τ est le temps de corrélation du champ de vitesse analogue à notre expression (4.66)

$$\alpha_k^V = \frac{4}{3} \int_{Ak}^{\infty} \Theta_{kqq} H_q^V \, dq \quad , \tag{4.118}$$

dans laquelle

$$\Theta_{kqq} \simeq \frac{1}{2\mu_q} \quad . \tag{4.119}$$

Le taux d'amortissement μ_q des corrélations triples donné par (4.12) contient une contribution magnétique et augmente donc avec l'énergie magnétique à grande échelle. Mais, comme nous le verrons au § 4.7, la diminution de α_k^V qui en résulte n'est pas le vrai mécanisme de la saturation de la croissance.

Moffatt (1970,a) propose

$$\alpha = + \frac{2}{3\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{q^2} H_q^V \, dq \quad , \tag{4.120}$$

qui est très proche de notre expression (4.66)

$$\alpha_k^V = \frac{4}{3} \int_{Ak}^{\infty} \Theta_{kqq} H_q^V \, dq \quad , \tag{4.121}$$

uniquement lorsque l'hélicité cinétique est confinée dans le domaine de dissipation où

$$\mu_k \simeq (\nu + \lambda) k^2 \quad . \tag{4.122}$$

Moffatt ne prend pas en compte l'amortissement turbulent des corrélations triples et l'éxpression (4.120) ne peut donc être utilisée en dehors de la zone de dissipation.

Remarque : Moffatt (1974) a proposé une autre expression du coefficient α^V valable dans la limite des grands nombres de Reynolds magnétiques ($\lambda \longrightarrow 0$)

$$\alpha^V(t) = \frac{1}{3} \int_0^t \langle \vec{v}(\vec{a},t) . \nabla a \wedge v(\vec{a},\tau) \rangle \, d\tau \quad . \tag{4.123}$$

Mais cette définition est exprimée en coordonnées lagrangiennes et pose des problèmes de convergence lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Dans le traitement non linéaire mis en oeuvre ici, nous obtenons un résultat supplémentaire, à savoir que l'hélicité magnétique à petite échelle est aussi importante que l'hélicité cinétique et que les effets cinétiques et magnétiques s'annulent à "l'équipartition" des hélicités

$$H_k^V - k^2 H_k^M = 0 \qquad (4.124)$$

Vainshtein et Zeldovich (1972), à la recherche d'un mécanisme de saturation du champ invoquent ce qu'ils appellent la "gyrotropie magnétique"

$$\langle \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \rangle = -\int_0^\infty q^2 H_q^M \, dq \qquad (4.125)$$

Selon ces auteurs, la "gyrotropie magnétique" à grande échelle, créée par l'"hélicité cinétique à petite échelle dans la première phase linéaire, serait, dans la phase non linéaire, responsable de l'annulation de l'hélicité cinétique à petite échelle. Si l'on se rapporte aux équations non locales on constate un effet contraire à celui qu'ils semblent trouver. Partant d'une hélicité cinétique à petite échelle H_k^V positive par exemple, l'équation (4.116) montre que l'hélicité magnétique à grande échelle qui croît est négative. Cette hélicité magnétique intervient dans les corrections hélicitaires à l'effet Alfvén (terme en $\tilde{\tilde{\ }}_k$) en donnant de l'hélicité cinétique <u>positive</u> à petite échelle (équ. 4.57). Ainsi l'hélicité magnétique à grande échelle renforce l'hélicité cinétique à petite échelle. En fait l'effet Alfvén d'équipartition des hélicités est l'effet dominant et c'est lui qui réduit le coefficient α_k^R ainsi que nous le verrons au § 4.7.

4.5 Intégration numérique des équations spectrales.

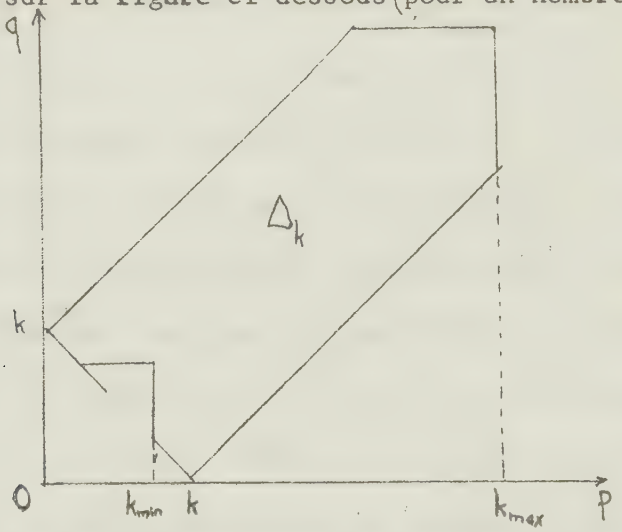
La méthode d'intégration numérique utilisée est pour l'essentiel celle de Leith (1971), revue par André & Lesieur (1975). L'intégration temporelle s'effectue suivant le "schéma d'Euler" :

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \, f'(t)$$

Pour calculer les intégrales doubles de la forme $\int_{\Delta_k} dpdq$, les nombres d'ondes sont discrétisés logarithmiquement avec F points par octave :

$$k(L) = k_{min}\, 2^{\frac{L-1}{F}} \qquad L = 1, \ldots\ldots, L_{max}$$

En général, on a pris $F = 3$ et $L_{max} = 31$, ce qui correspond à $\frac{k_{max}}{k_{min}} = 1024$. Le domaine d'intégration Δ_k, limité par les nombres d'ondes minima et maxima et par les inégalités triangulaires $(|k - p| < q < k + p)$ est représenté sur la figure ci-dessous (pour un nombre d'onde k donné).



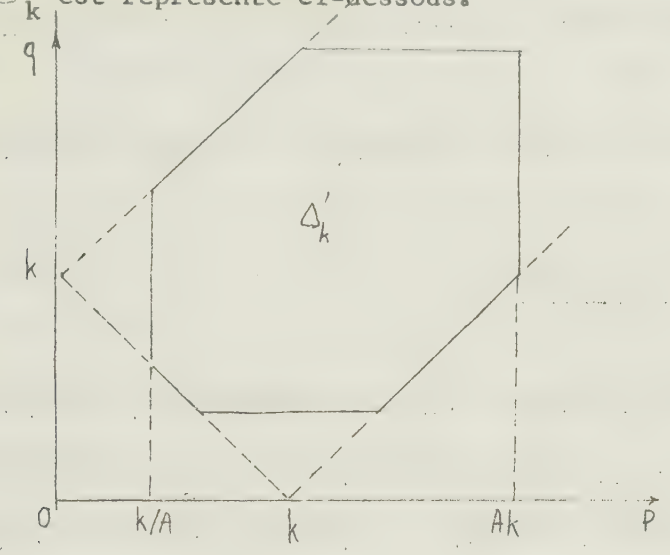
En fait, par suite de la discrétisation adoptée, le domaine d'intégration est plus réduit. Il est en effet facile de montrer que si $p > Ak$ (resp. $p < k/A$) où A est un nombre supérieur à un dépendant du nombre de points F par octave, on a alors $q = p$ (resp. $q = k$). Si L, M, N, sont les entiers (compris entre 1 et L_{max}) définissant k, p, et q, les inégalités triangulaires s'écrivent, dans le cas $M > L$,

$$L + \frac{F}{\text{Log } 2} \text{Log}(2^{M-L/F} - 1) \leq N \leq L + \frac{F}{\text{Log } 2} \text{Log}(2^{M-L/F} + 1)$$

qui ont pour unique solution $N = M$ (i.e $q = p$) dès que $M-L > a$, où a est donné par

$$a = F \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$$

Par exemple, si F = 3, a $\simeq$ 4.3 et on prend A = 5. Le domaine d'intégration réduit Δ_k est représenté ci-dessous.



Cette remarque permet un critère commode de distinction entre effets locaux, correspondants aux interactions des modes p et q contenus dans le domaine Δ'_k et effets non locaux, correspondant aux interactions des modes p et q contenus dans le domaine complémentaire Δ''_k de Δ'_k relativement à Δ_k (triangles (k,p,q) très aplatis). L'intégration des équations complètes (4.27-30) est réalisée dans le domaine Δ'_k, tandis que les expressions intervenant dans les équations non locales (4.113-116) sont calculées dans Δ''_k, avec le paramètre de développement A fixé par la procédure numérique.

L'injection des énergies et hélicités est faite au voisinage de k $\simeq$ 1 et les énergies sont de l'ordre de un à l'état stationnaire, ce qui signifie que ce sont les "gros tourbillons" porteurs d'énergie qui ont été choisis pour rendre les équations sans dimensions. Le temps caractéristique de la turbulence est aussi de l'ordre de un ("large eddy turn-over time"). Le spectre d'injection de l'énergie cinétique est maximum pour k = 1

$$F_k^V \sim k^4 \exp - 2\, k^2$$

et son intégrale sur k, le taux d'injection d'énergie, est aussi de l'ordre de un.

Le spectre d'injection d'hélicité cinétique est proportionnel à $k F_k^V$ et la constante de proportionnalité, appelée hélicité cinétique relative, peut être choisie entre 0 et 1 (équ. 4.26).

Pour des raisons de stabilité numérique, la valeur ΔT du pas de temps doit être telle que

$$\Delta T < \frac{1}{(\lambda + \nu) k_{max}^2}$$

où k_{max} est le nombre d'onde maximal. Si l'on veut étudier le transfert inverse d'énergie, vers les nombres d'ondes plus petits que k_E, k_{max} ne doit pas être trop grand afin d'avoir une zone de transfert inverse suffisemment étendue. Dans ce cas on a choisi $\nu = \lambda = 1/30$, $k_{max} = 16$ et $\Delta T = 0.01$. Pour étudier le transfert direct, vers les nombres d'ondes plus grands que un, on a pris $\nu = \lambda = 1/300$, $k_{max} = 128$ et $\Delta T = 0.006$ (André & Lesieur (1975) étudiant le cas de la turbulence non magnétique, ont des nombres de Reynolds bien plus élevés). Chaque pas de temps demandé environ 0.2 seconde de calcul sur ordinateur CDC 7600 dans le cas où $L_{max} = 31$ et $F = 3$. On vérifie numériquement que les flux totaux des quantités conservées restent inférieurs ou de l'ordre de 10^{-15} et, qu'à viscosité nulle, les spectres tendent vers les solutions d'équilibre tronqué (2.65-66).

Remarque : Une expression plus simple que (4.31) a été utilisée pour le temps de mémoire $\theta_{kpq}(t)$. On vérifie aisément que

$$\theta_{kpq}(t) = \frac{t}{1 + \mu_{kpq} t}$$

est très peu différent de l'expression exacte et s'y réduit exactement dans les limites des petits temps et du régime stationnaire.

4.6 La zone inertielle en turbulence MHD sans hélicité.

La théorie phénoménologique de Kraichnan (1965), rappelée au § 2.6, conduit à un spectre en $k^{-3/2}$ pour la zone inertielle de la turbulence MHD non hélicitaire. Nagarajan (1970) a entrepris une étude numérique de ce problème sur la base des équations spectrales sans hélicité avec un nombre de Reynolds assez faible et sans traiter des très importantes interactions locales. Quelques questions très intéressantes n'ont donc pratiquement pas reçu de réponses : y a t-il exactement équipartition des énergies ? Si oui, quelle est la dynamique exacte de l'approche vers l'équipartition ? Peut-on obtenir une zone inertielle suffisemment étendue avec les moyens numériques disponibles ? Que se passe-t-il pour des nombres de Prandtl magnétiques ($P_{rm} = \nu/\lambda$) très petits (noyau terrestre $P_{rm} \approx 10^{-3}$) ou très élevés (milieu interstellaire $P_{rm} \approx 10^{14}$). Une réponse à ces questions est actuellement possible à l'aide des équations spectrales (4.27-30), mais nous nous contenterons dans ce travail d'établir l'existence d'une zone inertielle en $k^{-3/2}$. On suppose pour cela que la turbulence est entretenue par injection d'énergie cinétique au taux ε^V au voisinage du nombre d'onde k_E, et qu'il y a de l'énergie magnétique à grande échelle caractérisée par

$$b_o^2 = \int_o^{k_E} E_q^M \, dq \quad . \tag{4.126}$$

En supposant l'existence d'une zone inertielle

$$E_k^V \sim k^{-n_V} \quad , \tag{4.127}$$

$$E_k^M \sim k^{-n_M} \quad , \tag{4.128}$$

(avec $n_V > 1$ et $n_M > 1$ pour avoir une énergie totale finie), on vérifie facilement que pour des nombres d'ondes k suffisemment grands, le taux d'amortissement turbulent par effet Alfvén

$$\omega_k^A = k\left(\int_o^k E_q^M \, dq\right)^{\frac{1}{2}} \simeq k\, b_o \quad ,$$

est supérieur au taux d'amortissement turbulent par cisaillement

$$\mu_k^S = \left(\int_0^k q^2 E_q^T \, dq \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous prendrons donc à la limite des grands nombres d'ondes,

$$\mu_k = k \, b_o , \tag{4.129}$$

et la théorie phénomènologique du § 2.6 (Kraichnan, 1965) conduit aux spectres

$$E_k^V = C_V (\varepsilon b_o)^{\frac{1}{2}} k^{-3/2} , \tag{4.130}$$

$$E_k^M = C_M (\varepsilon b_o)^{\frac{1}{2}} k^{-3/2} . \tag{4.131}$$

Ceci peut être retrouvé à l'aide des équations spectrales (4.27) et (4.29) et des résultats du § 3.7 concernant les flux d'énergie. Dans la zone inertielle le flux d'énergie Π_K doit être indépendant de K et on a donc

$$T_{\lambda k;\lambda p,\lambda q} = \lambda^{-3} T_{k;p,q} .$$

Si l'on reporte les expressions (4.127-128) des spectres et (4.129) du taux d'amortissement turbulent on obtient bien

$$n_V = n_M = \frac{3}{2} . \tag{4.132}$$

Il reste à vérifier la convergence des intégrales donnant les flux Π_K^+ et Π_K^- (équ.4.41) pour les énergie cinétique et magnétique.

A l'aide des expressions des coefficients géométriques données en Appendice A2, on montre que Π_K^- converge toujours tandis que Π_K^+ diverge comme $\int_0^K \frac{dq}{q^{3/2}}$ si $C_V \neq C_M$. Ceci établit donc l'existence d'une zone inertielle en $k^{-3/2}$. De plus, la convergence des intégrales montre que le transfert est local dans la zone inertielle car la contribution au flux d'énergie Π_K provient essentiellement d'une zone autour de Π_K. La cascade d'énergie est dite semi-locale (Orszag et Kruskol, 1968) car elle est contrôlée par une "horloge extérieure", le champ magnétique à grande échelle de dispersion b_o. La constante

C des spectres

$$E_k^V = E_k^M = C\,(\varepsilon^V b_o)^{1/2} k^{-3/2} \qquad (4.33)$$

peut être déterminée en identifiant le flux total d'énergie $\Pi_K^T = \Pi_K^V + \Pi_K^M$ au taux d'injection ε^V. Dans le cas présent, ce n'est pas intéressant puisqu'on ne connait pas l'ordre de grandeur de la constante C_A (equ. 4.12).

Le présent travail étant surtout axé sur l'effet dynamo associé à la cascade inverse d'hélicité magnétique, nous ne donnons ici les résultats numériques sans hélicité que pour mémoire car ils seront analysés plus en détail ultérieurement. La figure 1 donne les spectres d'énergie magnétique et cinétique à différents instants lorsque l'énergie est injectée sous forme uniquement cinétique dans une turbulence où $\langle E^V \rangle = 2,81$ et $\langle E^M \rangle = 10^{-3}$ à l'instant initial ; à t = 9, l'état stationnaire n'est pas encore atteint. On remarque sur la firgure 1' que le flux total d'énergie magnétique (local + non local) est négatif, indiquant un transfert inverse. La variation au cours du temps des énergies magnétique et cinétique est rapportée sur la figure 1".

Lorsque de l'énergie magnétique est injectée avec l'énergie cinétique, on peut partir d'une situation initiale telle que $\langle E^V \rangle = \langle E^M \rangle = 0$. La figure 2 donne les spectres d'énergie cinétique et magnétique au temps t = 5.5, l'équipartition est approximativement réalisée et les spectres sont en $k^{-3/2}$ dans la zone inertielle ; les flux locaux et non locaux sont donnés sur la figure 2' et les spectres compensés ($k^{+3/2} E_k$) sur la figure 2". La figure 2'" montre la saturation des énergies vers $t \simeq 5$, montrant que l'état stationnaire est bien atteint.

4.7 Cascade inverse d'hélicité magnétique.

Nous avons vu aux paragraphes 2.6 et 2.7 (voir aussi l'article "Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in MHD turbulence" en Appendice A5), qu'en présence d'hélicité, une cascade inverse d'hélicité magnétique était possible. Pour mettre une telle cascade en évidence, le plus simple est d'injecter de l'hélicité magnétique en même temps que de l'énergie cinétique, ce qui ne peut évidemment se faire sans injecter aussi de l'énergie magnétique en raison des inégalités (4.26).

La figure 3, où est représenté le spectre d'hélicité magnétique à différents instants, montre que pour des temps croissants l'hélicité magnétique est transférée vers des échelles de plus en plus grandes (petits nombres d'ondes). Pour un nombre d'onde donné, l'hélicité magnétique tend vers un spectre quasi-½ stationnaire qui pour $k \ll k_E$, suit approximativement une loi en puissance

$$H_k^M \sim k^{-n} \quad , \quad n \simeq 2$$

prédite au § 2.6 par des arguments dimensionnels. Pour un temps t fixé, le spectre passe par un maximum pour un nombre d'onde k_M qui varie à peu près comme 1/t.

La figure 4 montre l'évolution de l'hélicité magnétique totale et de l'énergie magnétique totale. On voit que l'hélicité croît de façon pratiquement linéaire avec une pente qui correspond à environ 80% du taux d'injection, ce qui montre que l'hélicité magnétique est transférée vers les petits nombres d'ondes plutôt que dissipée dans les grands nombres d'ondes. L'énergie magnétique totale croît initialement linéairement, au taux d'injection de l'énergie magnétique puis à la différence de l'hélicité magnétique, croît ensuite beaucoup plus lentement . Contrairement au cas sans hélicité (fig. 1) la saturation n'est pas atteinte, indication d'un transfert inverse d'énergie magnétique.

La figure 5 représente le spectre d'énergie magnétique pour différents temps, le transfert inverse d'énergie magnétique est manifeste (spectre approximativement en k^{-1}).

Sur la figure 6 sont représentés les spectres d'énergie cinétique et magnétique à t = 200 ; on voit qu'une certaine quantité d'énergie cinétique a aussi été transférée vers les petits nombres d'onde. Ceci est dû au couplage entre énergie cinétique et magnétique per l'intermédiaire de la force de Lorentz (le même phénomène se produit avec les hélicités).

Il est possible de comprendre à l'aide des effets non locaux décrits au § 4.4, que le mécanisme à l'oeuvre dans le cadre inverse est essentiellement une compétition entre les effets Alfvén et α. Partant d'une situation initiale avec une très faible énergie magnétique dans les nombres d'ondes inférieurs à k_E, l'hélicité magnétique injectée près de k_E va produire la croissance par effet α magnétique de l'énergie et l'hélicité magnétiques dans les nombres d'ondes plus petits, par exemple $k \simeq k_E/2$. La croissance de l'énergie magnétique vers $k_E/2$ tend alors à réduire, par effet Alfvén, l'hélicité résiduelle ($H_k^R = H_k^V - k^2 H_k^M$) vers k_E ce qui bloque la croissance ultérieure de l'excitation magnétique vers $k_E/2$. Mais alors l'hélicité résiduelle vers $k_E/2$ (principalement magnétique à ce stade) va destabiliser l'énergie et l'hélicité magnétiques à des nombres d'ondes encore plus petits, par exemple $k \simeq k_E/4$, et ainsi de suite.

L'étude phénoménologique du § 2.6 avait conduit à envisager une cascade inverse d'hélicité magnétique avec des spectres de la forme

$$H_k^M = \tilde{C}_M (\tilde{\varepsilon}^M)^{2/3} k^{-2} , \tag{4.134}$$

$$E_k^M = C_M (\tilde{\varepsilon}^M)^{2/3} k^{-1} . \tag{4.135}$$

Pour établir l'existence d'une telle cascade, il faudrait montrer en particulier la convergence de l'intégrale exprimant le flux d'hélicité magnétique,

$$\tilde{\Pi}_K^M = - \int_0^K dk \iint_0^\infty dpdq \; T_{k;p,q} , \tag{4.136}$$

et vérifier, lorsque $K \longrightarrow 0$, que $\tilde{\Pi}_k^M$ tend vers une constante négative. Mais on constate qu'avec les spectres (4.134-135), $\tilde{\Pi}_K^M$ diverge logarithmiquement lorsque $K \longrightarrow 0$, ce qui rappelle un phénomène analogue se produisant dans la cascade directe d'enstrophie de la turbulence à deux dimensions (Kraichnan, 1971 b). Comme dans le cas bidimensionnel, cette dépendance logarithmique est

due à des effets non locaux et la question se pose de savoir si elle peut être éliminée en introduisant des corrections logarithmiques aux spectres. Toutefois dans le cas présent on rencontre alors d'autres difficultés qui n'ont pas encore été complètement résolues et qui sont reliées aux questions suivantes:

(i) L'énergie magnétique totale diverge logarithmiquement en k = 0 si $E_k^M \sim k^{-1}$. Une correction logarithmique à ce spectre implique une saturation de l'énergie magnétique totale.

(ii) Est-ce que l'équipartition des énergies et des hélicités sera atteinte ? Cette question est liée à la précédente puisque plus il y a d'énergie magnétique à grande échelle, plus le couplage par effet Alfvén sera efficace

(iii) Est-ce que la solution stationnaire aura une hélicité magnétique maximale ?

Remarque : Dans son étude sur l'effet dynamo non linéaire à la limite des faibles nombres de Reynolds magnétique, Moffatt (1970 b) trouve un nombre d'onde privilégié pour la croissance du champ. En effet, dans la zone de dissipation, il y a compétition entre l'effet α (taux caractéristique $\propto k$) et la dissipation (taux caractéristique $\propto k^2$). Dans la zone inertielle qui nous intéresse ici, au contraire, le taux de croissance $k \alpha \frac{R}{k}$ est maximal pour les nombres d'ondes situés immédiatement à gauche de la région qui contient l'hélicité résiduelle et ce seront ces nombres d'ondes qui seront amplifiés les premiers ; ceci se rattache bien à l'idée d'une cascade qui s'effectue progressivement vers des nombres d'ondes de plus en plus petits.

4.8 La dynamo turbulente.

Nous arrivons maintenant à la question fondamentale. Est-ce que la turbulence peut engendrer des champs magnétiques à grande échelle ? Plus précisément, étant donné une turbulence cinétique dans un milieu conducteur, turbulence entretenue uniquement par injection d'énergie et d'hélicité cinétiques et étant donné un champ magnétique initial infinitésimal (germe), est-ce que l'interaction entre l'excitation cinétaique et magnétique va conduire à :

(i) une croissance du champ ?

(ii) l'apparition d'énergie magnétique à grande échelle ?

La présence d'un germe initial est nécessaire car si le champ initial est identiquement nul, il le reste en vertu des équations (2.1-3) ou (4.27-30). Nous avons déjà montré au § 4.6 que le phénomène (i) se produisait dans le cas de turbulences magnétiques non hélicitaires, pour les nombres d'ondes $k \gtrsim k_E$. En ce qui concerne le deuxième phénomène, il est vrai qu'au § 4.7 nous avons mis en évidence un mécanisme de cascade inverse dans les nombres d'ondes $k \lesssim k_E$, mais cela en injectant de l'hélicité magnétique ce qui n'est pas réaliste. Une situation moins artificielle est celle où l'hélicité est injectée sous forme uniquement cinétique.

Cela peut se produire par exemple dans un fluide en rotation sous l'action conjuguée de la force de Coriolis et d'une stratification de la turbulence, comme l'ont remarqué pour la première fois Steenbeck, Krause & Rädler (1966) (voir aussi appendice A3). On a donc étudié numériquement le cas où le taux d'injection d'hélicité cinétique était maximal

$$\widetilde{F}^V_k = k F^V_k \quad , \tag{4.137}$$

et il n'y a pas d'excitation magnétique injectée. Les spectres initiaux d'énergie sont en $k^4 \exp - 2k^2$; l'énergie cinétique totale est égale à 1, l'énergie magnétique totale est égale à 0.1. Les densités spectrales des hélicités

magnétiques et cinétiques initiales sont nulles. On observe essentiellement deux phases successives. Dans la première phase, essentiellement la même que dans le cas avec injection d'énergie cinétique décrit au § 4.6, on aboutit à l'équipartition des énergies cinétiques et magnétiques (spectre en $k^{-3/2}$) au bout d'un temps de quelques unités, pour $k > k_E$. Tant que l'énergie magnétique reste négligeable, l'hélicité cinétique est approximativement conservée par les interactions non linéaires (§ 2.1 et Appendice A3). Dans cette première phase, l'hélicité cinétique injectée à k_E est advectée par la cascade directe d'énergie. Dès qu'il y a suffisamment d'énergie magnétique, l'équipartition des hélicités due à l'effet Alfvén (§ 4.4.2)

$$H_k^V - k^2 H_k^M = 0 \quad ,$$

se produit d'abord dans les grands nombres d'ondes et la densité spectrale d'hélicité magnétique ne reste donc pas nulle : si l'hélicité cinétique injectée est positive, l'hélicité magnétique est aussi positive dans les grands nombres d'ondes et négative dans les petits nombres quisque l'hélicité magnétique totale est un invariant et qu'elle a été prise nulle initialement. Mais elle ne le reste pas puisqu'il y a dissipation d'hélicité magnétique positive dans les grands nombres d'ondes. Cette dissipation joue le rôle de source d'hélicité magnétique négative. Et la deuxième phase commence où de l'hélicité magnétique négative est transférée vers les petits nombres d'ondes, comme décrit au § 4.7. L'ensemble du processus peut être schématisé de la façon suivante : (les flèches $\xrightarrow{(A)}$ et $\xrightarrow{(\alpha)}$ représentent respectivement les effets Alfvén et α)

$$k \sim k_E \begin{cases} \text{Injection} \begin{cases} H_k^V > 0 \xrightarrow{(A)} \text{création } E_k^M (k > k_E) \xrightarrow{(A),(\alpha)} \text{création} \begin{cases} H_k^M > 0, \ k > k_E \\ H_k^M < 0, \ k < k_E \end{cases} \\ E_k^V \end{cases} \\ \text{et } E_k^M \neq 0 \end{cases}$$

$$k \gg k_E, \text{ dissipation } H_k^M > 0 \Longleftrightarrow \text{injection } H_k^M < 0 \xrightarrow{(\alpha)} \text{création} \begin{cases} H_k^M < 0, \ k < k_E \\ E_k^M, \ k < k_E \end{cases}$$

Le spectre d'hélicité magnétique à différents instants est représenté sur la figure 7. Un état quasi-stationnaire n'étant encore pas atteint à T = 240 dans la cascade inverse, la pente des spectres est bien éloignée de la valeur théorique donnée par (4.134).

Le spectre d'énergie magnétique est représenté sur la figure 8 à différents instants : la croissance de l'énergie magnétique dans les grandes échelles est manifeste. Sur la figure 9 ont été représentées les variations temporelles des énergies et hélicités totales. Une question se pose alors : quelle est la relation entre le flux inverse d'hélicité magnétique $\tilde{\Pi}^M$ et le taux d'injection d'hélicité cinétique $\mathcal{E}^V$ qui ont des dimensions différentes ($\tilde{\Pi}^M = \mathcal{E}^V k_*^{-2}$ où k_* a la dimension d'un nombre d'onde). La "source" d'hélicité magnétique est située dans la zone de dissipation, mais cette zone est en fait contrôlée par l'injection. Les résultats numériques indiquent

$$k_* \simeq 2.9\, k_E \qquad (4.138)$$

Comme au paragraphe précédent, il n'a pas été possible de déterminer si le champ magnétique total se saturait. La figure 9, montrant l'évolution de l'énergie magnétique totale en fonction du temps en coordonnées logarithmiques, semble indiquer une telle saturation après une loi de croissance intermédiaire

$$\langle E^M \rangle \sim t^{1/3} \qquad (4.139)$$

On vérifie aussi, comme dans le cas avec injection d'hélicité magnétique (§ 4.7) que le spectre passe par un maximum pour un nombre d'onde qui décroit à peu près comme 1/t.

49 - CONCLUSION - DÈVELOPPEMENTS ENVISAGES

Le but essentiel de ce travail était d'élucider les bases physiques de l'effet dynamo hélicitaire. L'existence d'une cascade inverse hélicité magnétique conjecturée par Frisch et Al (1975) peut être maintenant considérée comme solidement établie. On rappelle qu'au niveau de la physique, il s'agit essentiellement d'une compétition entre les effets α cinétique et magnétique destabilisateurs des grandes échelles et l'effet Alfvén qui tend à supprimer l'hélicité résiduelle à petite échelle. L'existence de transfert inverse d'excitation magnétique en présence d'hélicité est d'ailleurs confirmée par un calcul numérique direct sur les équations de la MHD, qui vient d'être réalisé au NCAR par Pouquet et Patterson (1975).

Le formalisme développé pour la turbulence MHD homogène et isotrope permet d'envisager l'étude détaillée de questions qui n'ont été qu'effleurées dans le présent travail. Citons, par exemple, l'influence du nombre de Prandtl magnétique ($P_{rm} = \nu/\lambda$) qui, dans les situations astrophysiques, peut varier de 10^{-3} à 10^{14}. Citons encore la question très controversée de l'approche vers l'équipartition dans les petites et moyennes échelles. Lorsqu'un germe de champ magnétique est introduit dans une turbulence non magnétique développée (spectre de Kolmogorov), il est d'abord advecté comme un scalaire passif vers les zones de dissipation où il atteint d'abord l'équipartition (cas $P_{rm} = \nu/\lambda = 1$) puis l'équipartition est atteinte dans des échelles de plus en plus grandes et les spectres tendent vers une loi de puissance en $k^{-3/2}$ (cf. figure 2).

Il est intéressant d'étudier cette évolution dans le cas des nombres de Prandtl très différents de l'unité. L'étude détaillée de l'effet des diffusivités turbulentes doit aussi être faite puisque cet effet agit en sens opposé à l'effet α.

Les méthodes utilisées ici pour étudier la turbulence MHD ne sont pas adaptées à l'étude des diverses instabilités liées aux points neutres du champ magnétique (Parker, 1972; Piddington, 1973; Vainshtein, 1974. Pour une revue, voir Sweet, P.A., 1969, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 7, 149 ou Yeh, I, et Axford, W.I., 1970, J. Plasma Physics, 4, 207). Dans la turbulence, la question est de savoir si les instabilités ont le temps de se développer, car elles n'ont été étudiées que dans le cas d'énergie magnétique très supérieure à l'énergie cinétique; si oui, l'énergie magnétique qui disparaît alimente-t-elle le champ de vitesse ou est-elle dissipée? Le premier cas (gain d'énergie cinétique) apparaît comme le plus vraisemblable en turbulence homogène et nous avons vu le rôle des ondes d'Alfvén pour l'équipartition des énergies. Mais la seconde possibilité (dissipation par effet Joule) peut expliquer l'annihilation du champ magnétique à grande échelle dans les taches solaires, par exemple.

Dans le cadre de la turbulence MHD homogène, isotrope et hélicitaire, ce sont au contraire les petites échelles qui sont d'abord dissipées par diffusivité turbulente dès que cesse l'injection d'énergie. Les prédictions théoriques concernant la turbulence MHD homogène doivent être appliquées avec précaution aux cas réalistes d'intérêt astrophysique ou géophysique, qui sont de dimensions finies. Même s'il y a un mécanisme continu d'injection d'hélicité cinétique, la cascade inverse d'hélicité magnétique ne peut transférer de l'excitation magnétique que jusqu'à des échelles comparables à la taille du système et à ces échelles, l'homogénéité n'est absolument pas vérifiée. De plus, les diverses instabilités MHD sont alors susceptibles de se produire. La théorie présentée ici donne le mécanisme de la génération du champ à grande échelle à partir d'un germe initial infinitésimal et ne peut rendre compte des effets particuliers dûs aux dimensions finies de la turbulence réelle. Les vérifica-

tions expérimentales précises des résultats de cette théorie devront donc être recherchées de préférence dans les propriétés de la turbulence MHD à petite échelle pour lesquelles l'homogénéité est réalisée avec une bonne approximation.

Le paramètre essentiel en ce qui concerne les applications astrophysiques est le taux d'injection d'hélicité cinétique. Si L et T sont les échelles caractéristiques de longueur et de temps des tourbillons contenant l'énergie, des arguments dimensionnels (cf. Appendice A_3) donnent :

$$\varepsilon^V \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{T}$$

$$\tilde{\varepsilon}^V \approx \frac{\Omega \langle v^2 \rangle}{L}$$

et le taux relatif d'injection d'hélicité cinétique est donc

$$\frac{|\tilde{F}_k^V|}{k F_k^V} \approx \frac{L \tilde{\varepsilon}^V}{\varepsilon^V} \approx \Omega T$$

Ce taux est inférieur à l'unité par définition (§ 4.3.). Dans le cas de la Terre, ce rapport peut être de l'ordre de l'unité mais pour la photosphère solaire, il est certainement petit puisque la durée de vie des granules, T, est de l'ordre d'une centaine de secondes. D'autre part, le champ de vitesse des granules n'est pas nécessairement turbulent et peut, au contraire, jouer un rôle destructeur de flux magnétique (Drobyshevski et Yuferev, 1974).

Signalons enfin qu'une étude expérimentale des effets de l'hélicité n'est pas à éliminer a priori. Contrairement à l'hélicité cinétique dont l'injection ne peut s'opérer que grâce à la dissipation par viscosité dans une couche limite (puisque l'hélicité est conservée par les équations du fluide parfait), l'hélicité magnétique pourrait être injectée initialement en volume par exemple au moyen de courants extérieurs.

FIGURE 1- Injection d'énergie cinétique uniquement .

Les spectres d'énergie magnétiques sont représentés en trait plein aux temps t = 0 , 1, 2, 4 et 9 .Les spectres d'énergie cinétique sont représentés en tireté aux temps t = 0 et t = 9.

Spectres initiaux: $<E^V> = 2,81$ (turbulence non magnétique développée) ; $\nu = 1/300$

$$<E^M> = 10^{-3} \quad , E^M_k \sim k^4 \exp -2k^2 \quad ; \quad \lambda = 1/300$$

Spectre d'injection d'énergie cinétique: $F^V_k \sim k^4 \exp -2k^2$

Taux d'injection: $\varepsilon^V = 1$

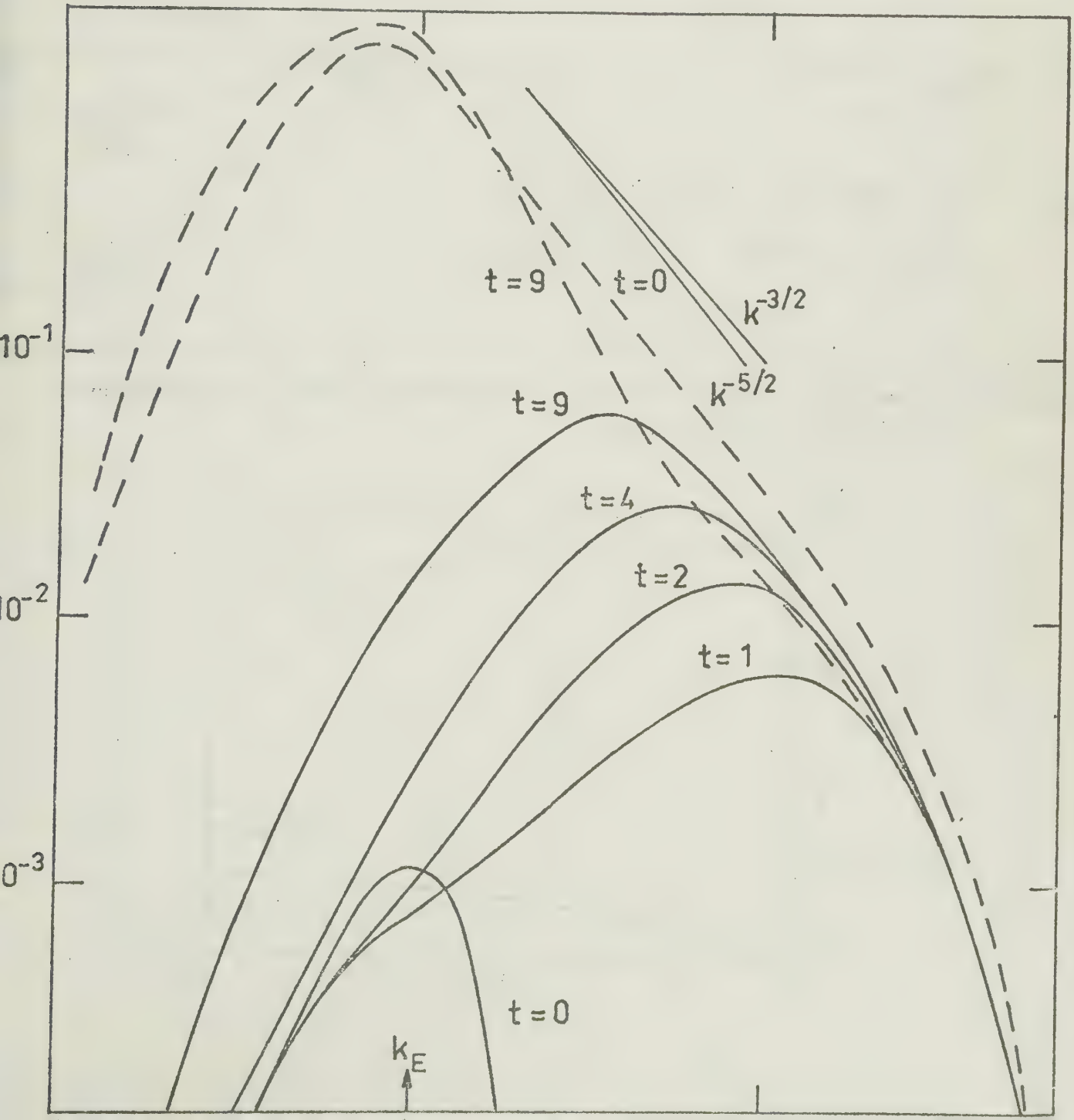


FIGURE 1' - Injection d'énergie cinétique uniquement. Les flux d'énergie locaux et non locaux sont représentés au temps t = 9. Les conditions sont celles de la figure 1.

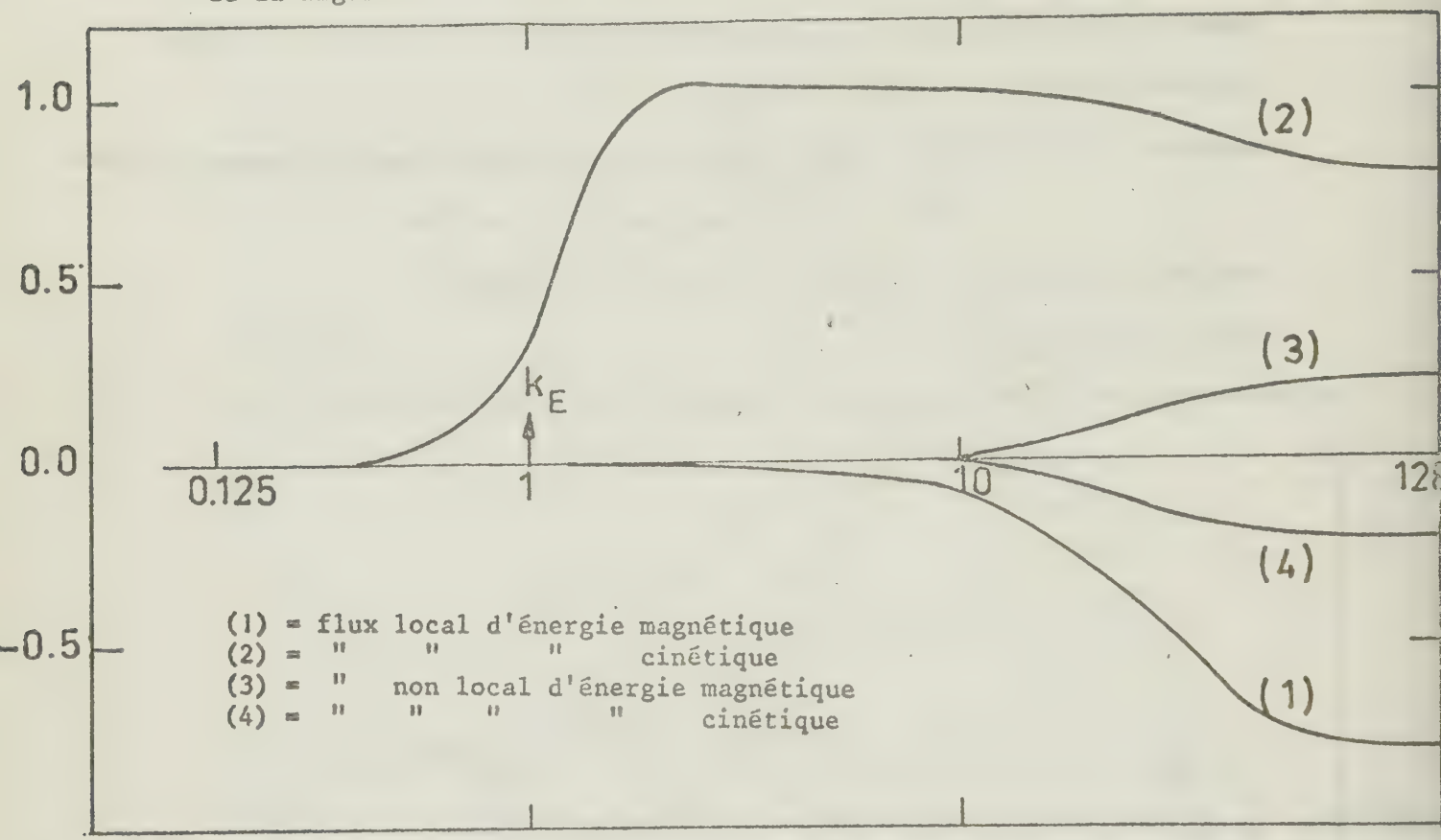
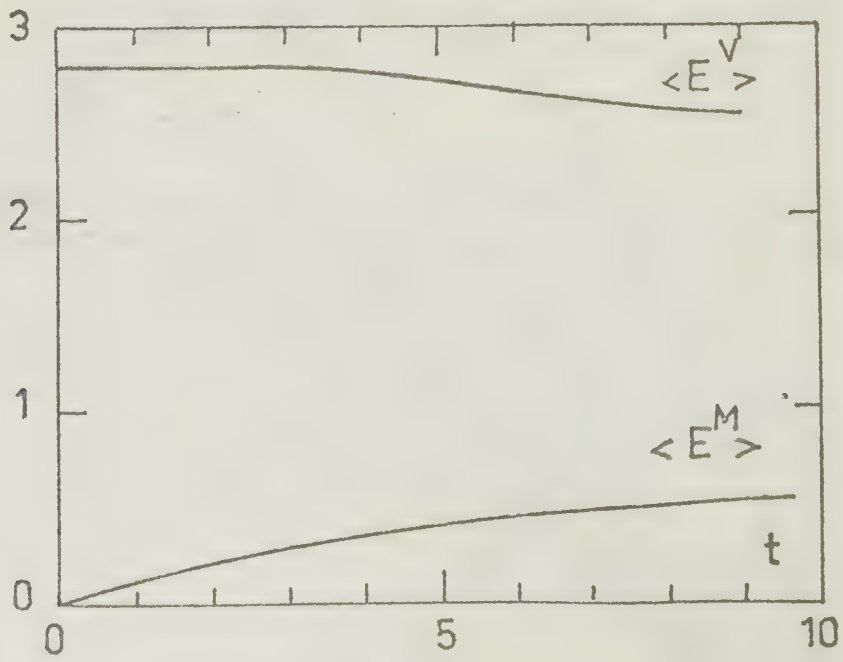


FIGURE 1" - Variation des énergies cinétique et magnétique totales. Les conditions sont celles de la figure 1.



IGURE 2 - Injection d'énergie cinétique et d'énergie magnétique.

Les spectres des énergies sont représentés au temps $t = 5,5$ (les spectres d'injection sont en tireté).

Spectres initiaux nuls. $\nu = \lambda = 1/300$.

Spectres d'injection: $F_k^V \sim k^4 \exp -2k^2$, $F_k^M = F_k^V$

Taux d'injection: $\varepsilon^V = \varepsilon^M = 0,5$

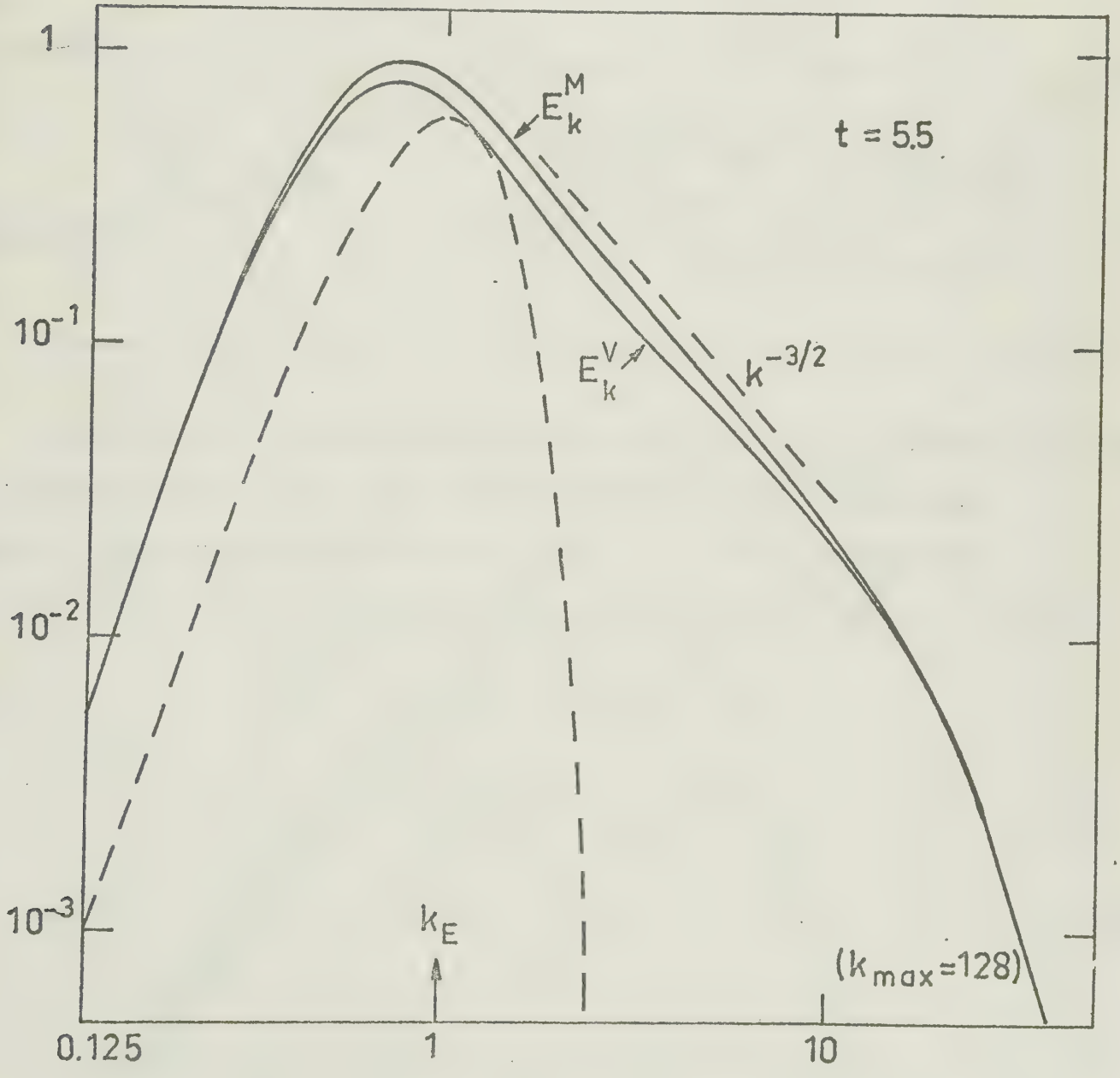


FIGURE 2' - Injection d'énergie cinétique et d'énergie magnétique. Les flux locaux et non locaux sont représentés au temps t= 5,5. Remarquer le flux total dans la zone inertielle, égal au taux d'injection d'énergie totale. Les conditions sont celles de la figure 2.

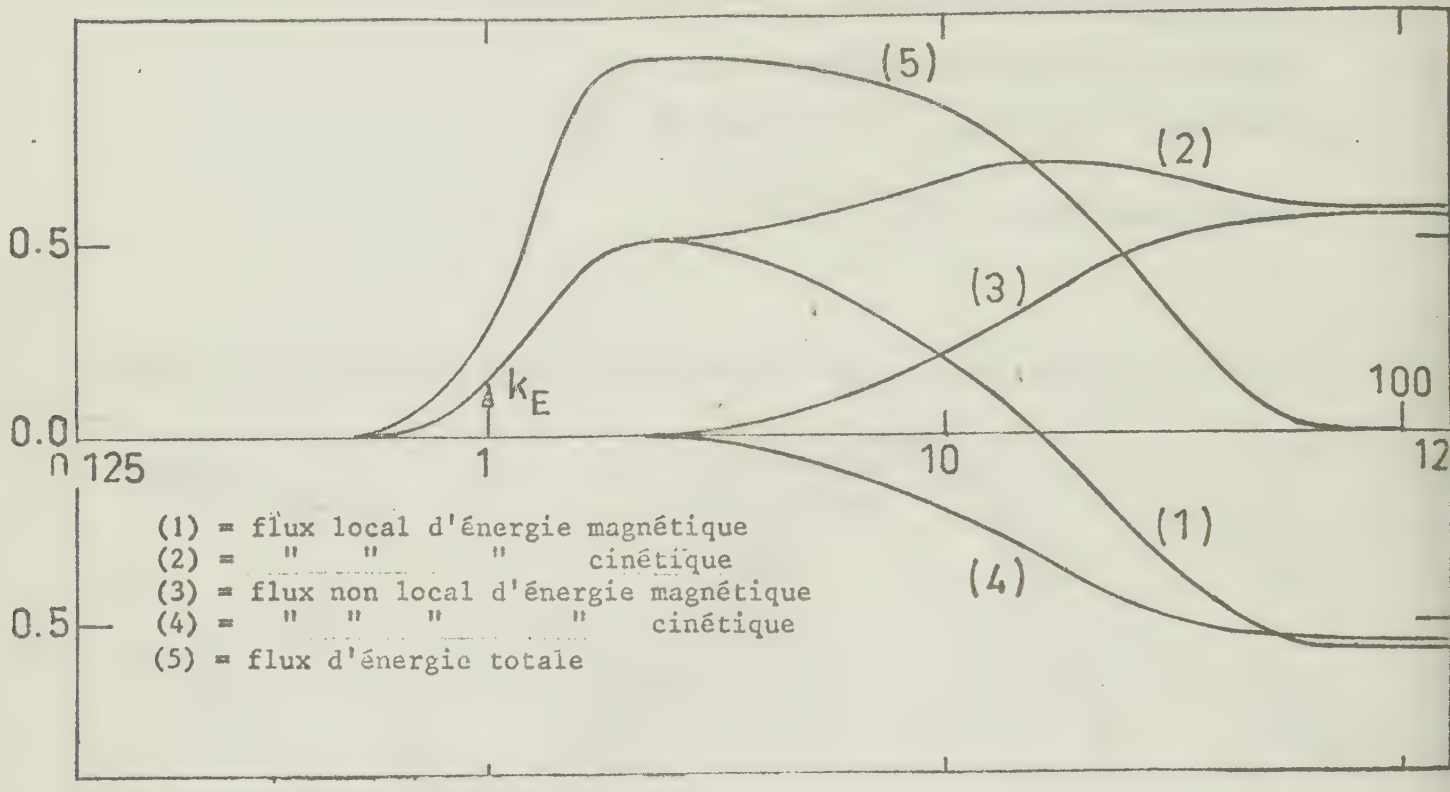


FIGURE 2" - Injection d'énergie cinétique et d'énergie magnétique. Les spectres compensés, $k^{3/2}E_k^V$ et $k^{3/2}E_k^M$ sont représentés au temps t = 5,5. Remarquer la zone inertielle(de k 1 à k 16). Les conditions sont celles de la figure 2.

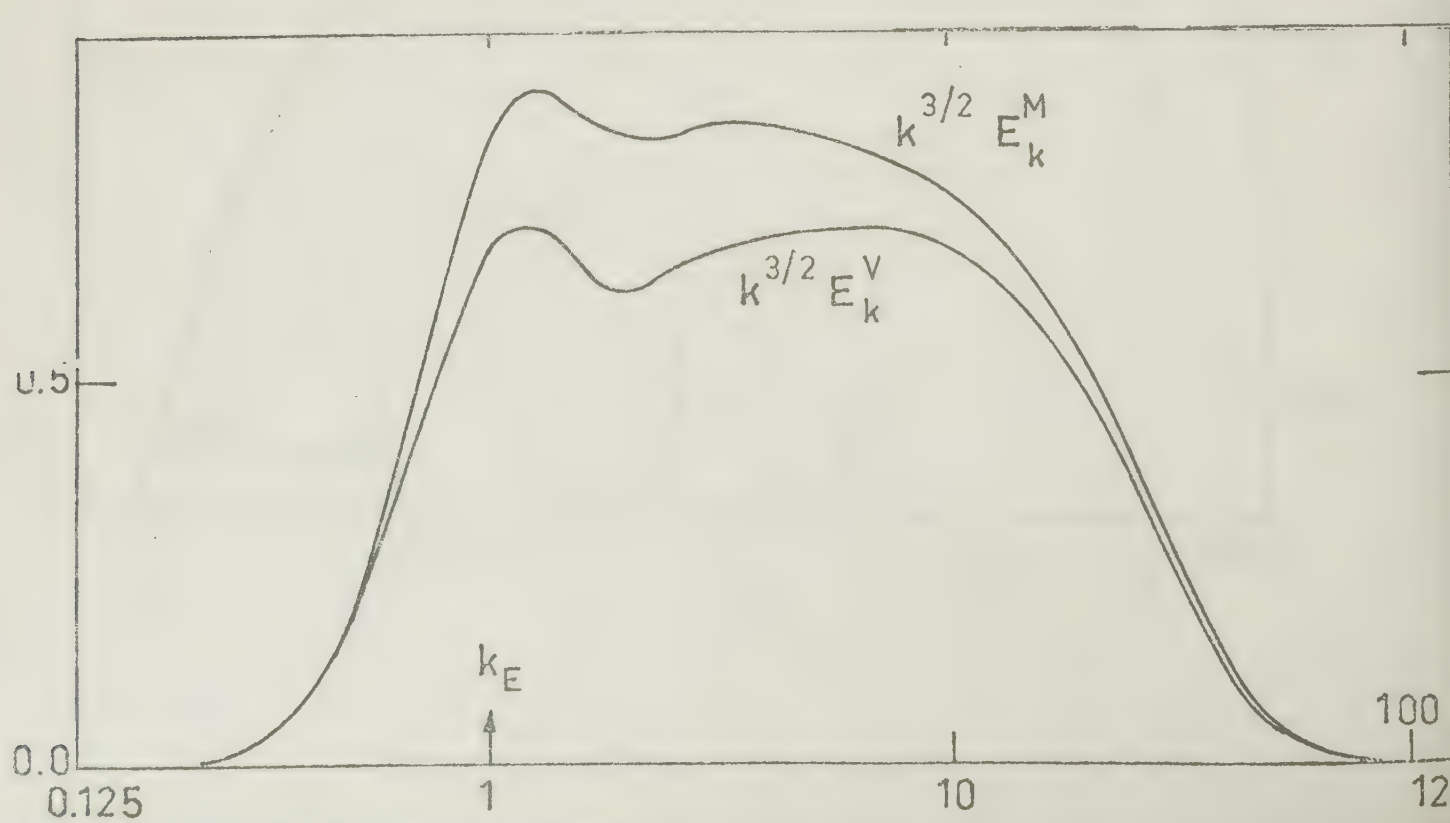


FIGURE 2"' - Injection d'énergie cinétique et d'énergie magnétique. Variation des énergies totales (l'énergie injectée, cinétique ou magnétique, est en tireté). Remarquer la saturation des énergies à $t \sim 5$. Les conditions sont celles de la figure 2.

Un cas non magnétique est donné pour comparaison. La variation d'énergie cinétique est représentée en trait fin (spectre initial d'énergie cinétique nul, $\gamma = 1/300$, taux d'injection $\mathcal{E}^V = 1$).

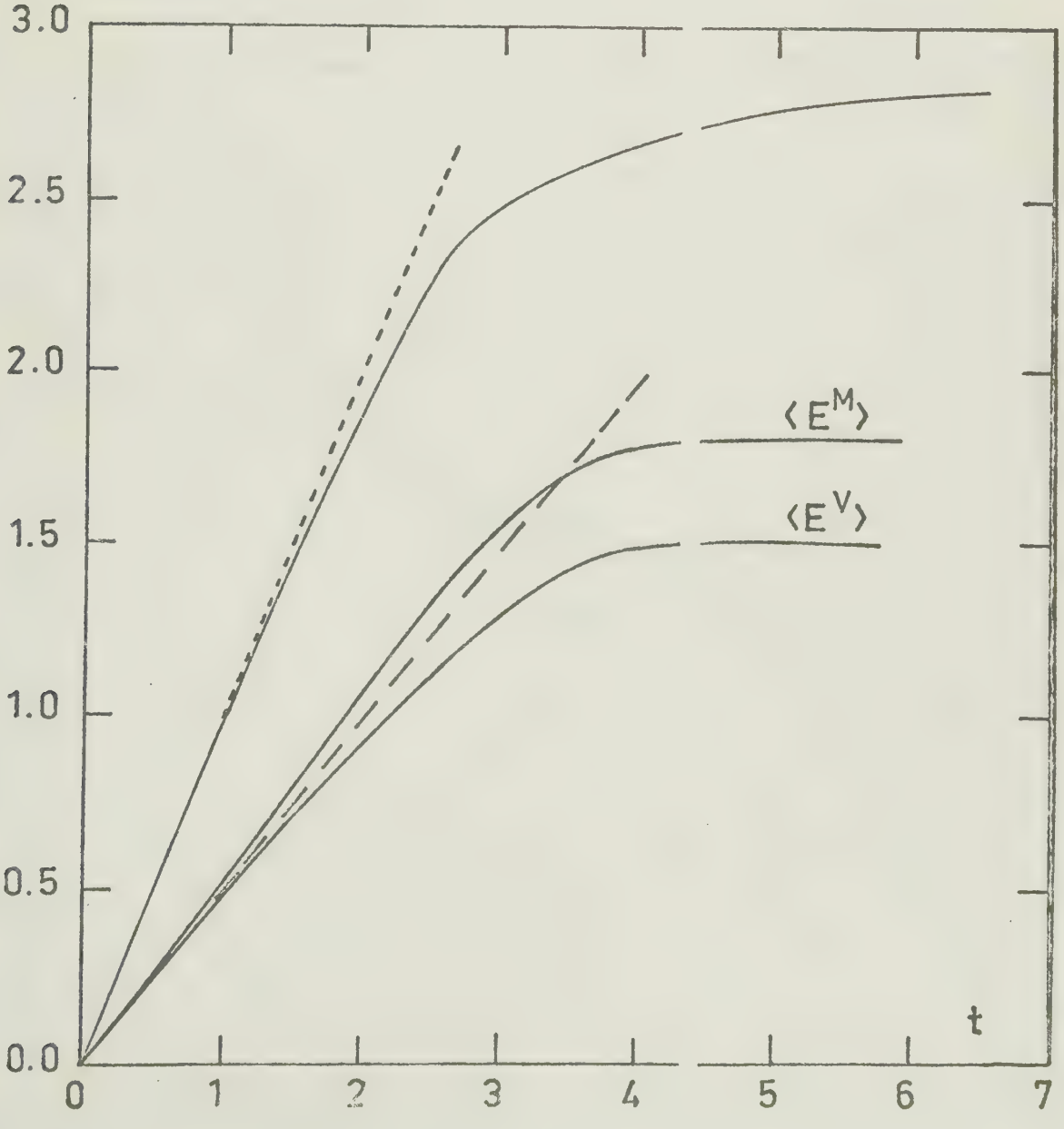


FIGURE 3 - Injection d'énergie et d'hélicité magnétiques (et d'énergie cinétique).

Le spectre d'hélicité magnétique est représenté à différents instants (le spectre d'injection est en tireté). Remarquer le spectre quasi-stationnaire dans la cascade inverse.

Spectres initiaux nuls. $\nu = \lambda = 1/30$.

Spectres d'injection : $F_k^V \sim k^4 \exp -2k^2$, $\tilde{F}_k^V = 0$; $F_k^M = F_k^V$, $\tilde{F}_k^M = F_k^M/k$.

Taux d'injection : $\mathcal{E}^V = \mathcal{E}^M = 0.5$, $\tilde{\mathcal{E}}^V = 0$, $\tilde{\mathcal{E}}^M = 0.532$.

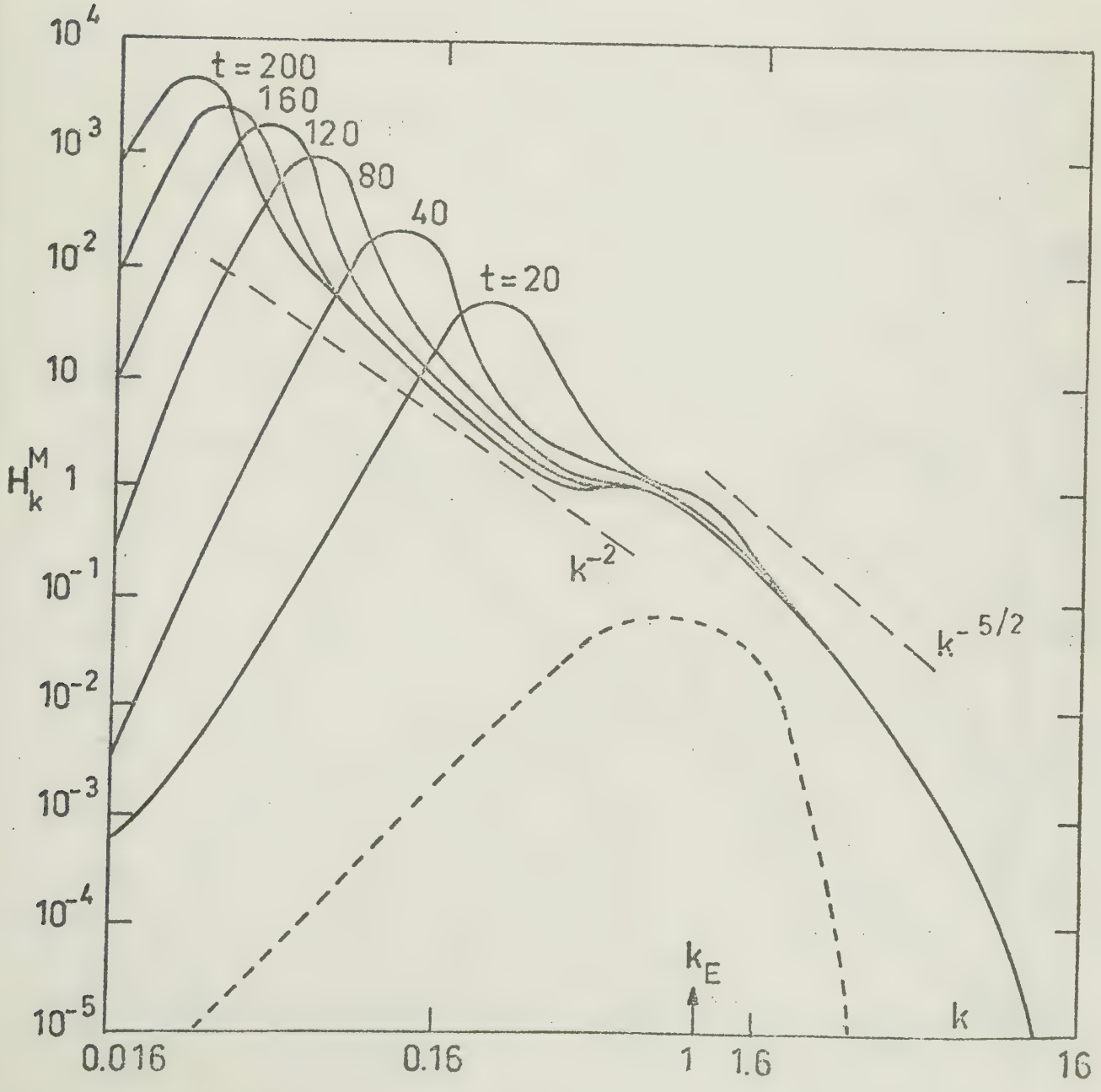


FIGURE 4 - Injection d'énergie et d'hélicité magnétiques (et d'énergie cinétique).

Variation de l'hélicité magnétique totale et del'énergie magnétique totale (l'hélicité magnétique totale injectée est en tireté, l'énergie magnétique totale injectée est en pointillé). Remarquer la croissance linéaire et l'absence de saturation de l'hélicité magnétique totale.

Les conditions sont les mêmes que pour la figure 3.

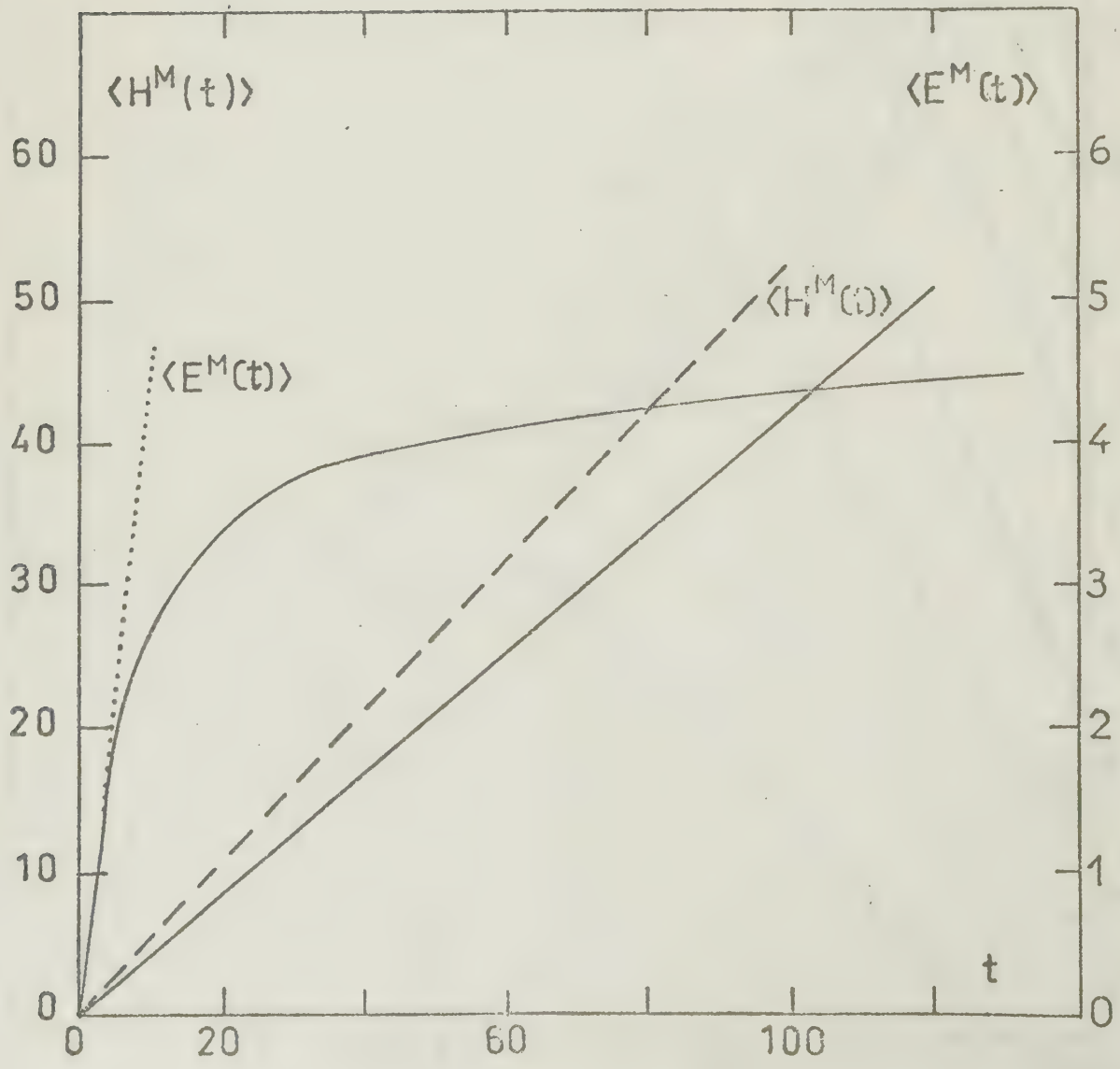


FIGURE 5 - Injection d'énergie et d'hélicité magnétiques (et d'énergie cinétique).

Le spectre d'énergie magnétique est représenté à différents instants (le spectre d'injection est en pointillé). Remarquer la croissance de l'énergie magnétique dans les grandes échelles et la quasistationnarité du spectre dans les petites échelles.

Les conditions sont les mêmes que pour la figure 3.

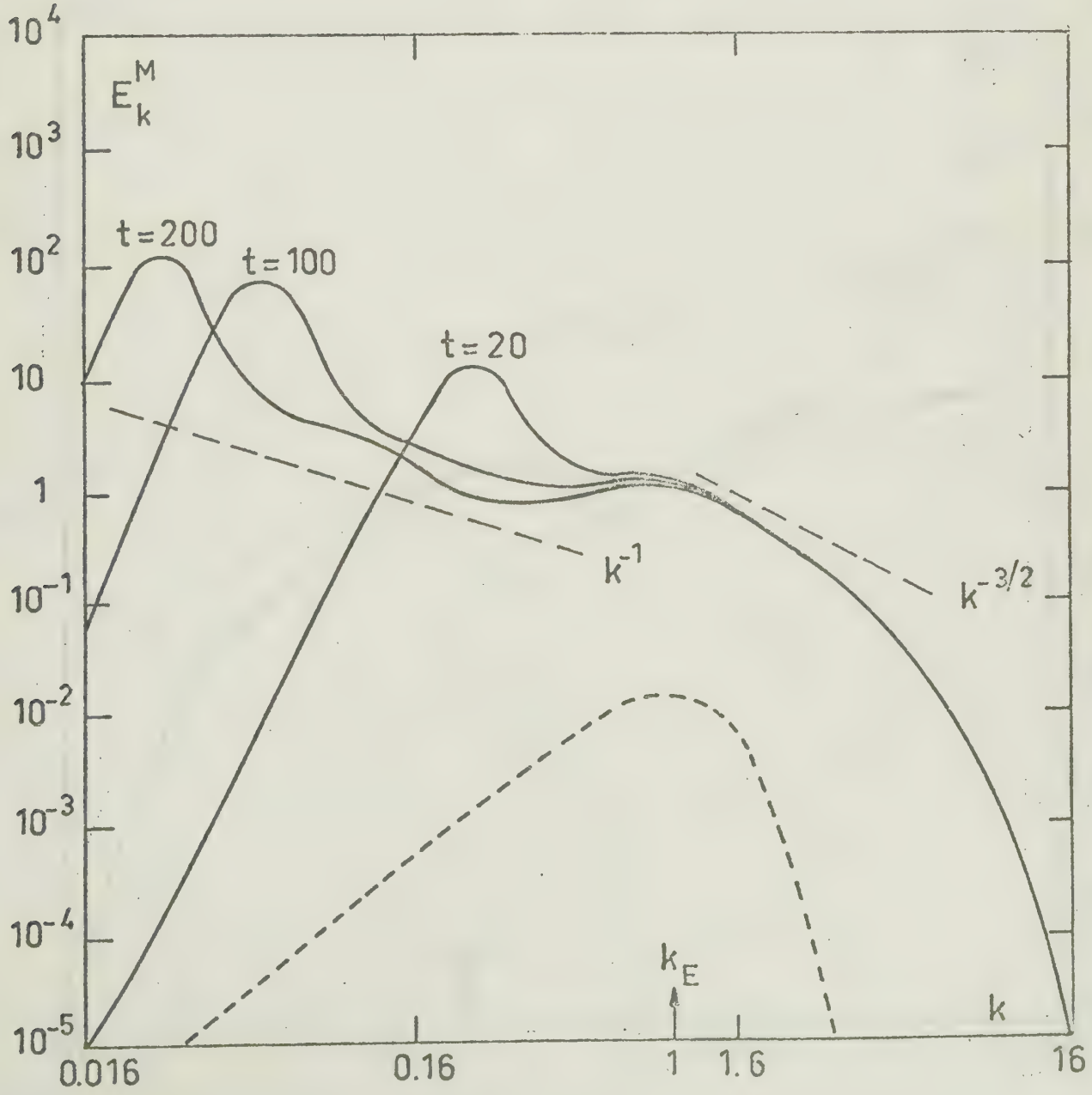


FIGURE 6 - Injection d'énergie et d'hélicité magnétiques (et d'énergie cinétique).

Les spectres d'énergies cinétique et magnétique sont représentés à t = 200.

Les conditions sont les mêmes que pour la figure 3.

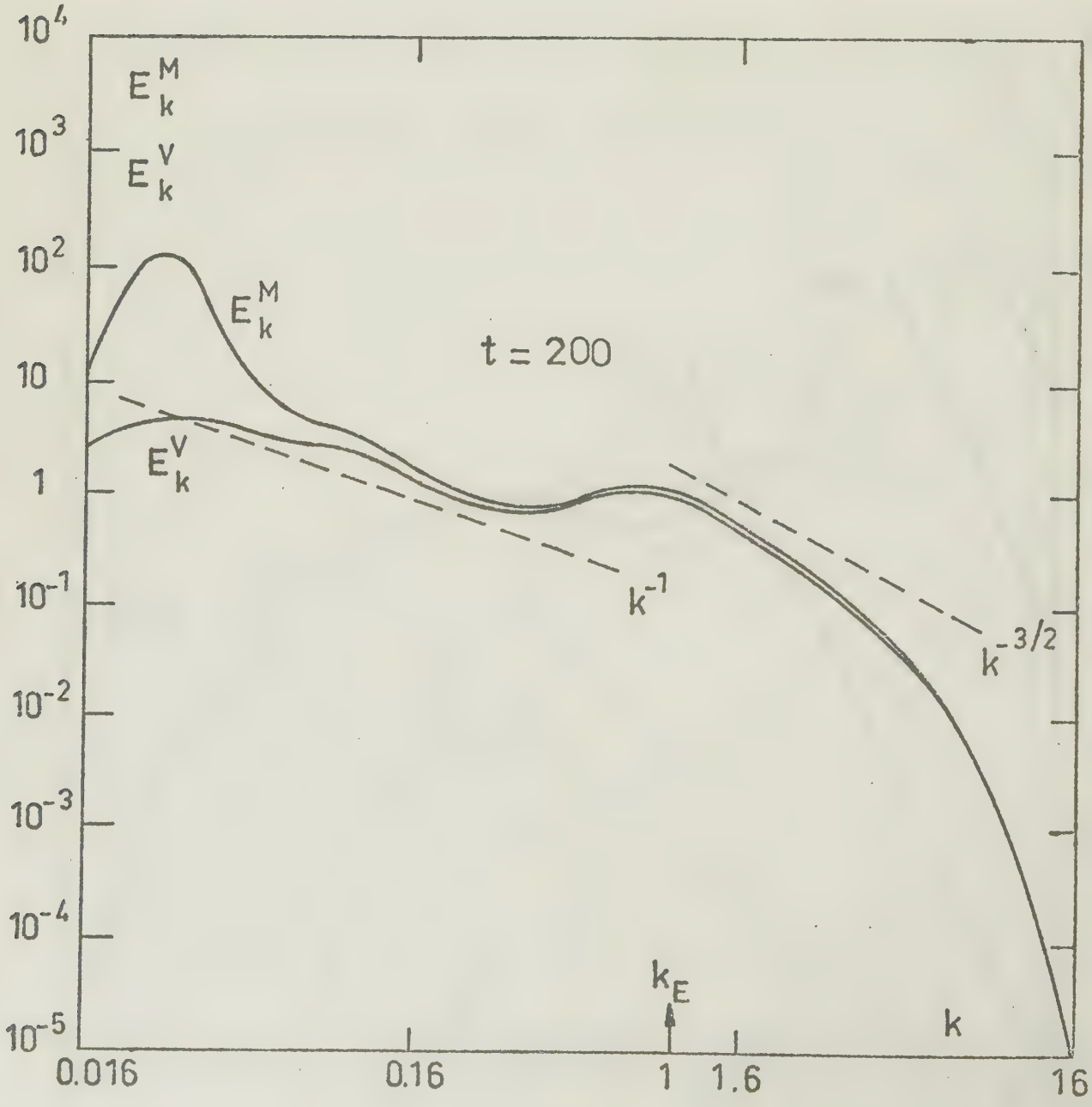


FIGURE 7 - Injection d'énergie et d'hélicité cinétiques uniquement.

Le spectre d'hélicité magnétique est représenté à t = 120 (en tireté) et t = 240 (en trait continu) ; les spectres sont négatifs à gauche de la verticale et positifs à droite. Remarquer la cascade inverse d'hélicité magnétique.

Spectres initiaux : $E_k^V \sim k^4 \exp -2k^2$ ($\langle E^V \rangle = 1.$), $H_k^V = 0$; $E_k^M = 0.1 E_k^V$

$H_k^M = 0$. $\nu = \lambda = 1/30$

Spectres d'injection : $F_k^V \sim k^4 \exp -2k^2$, $\tilde{F}_k^V = kF_k^V$; $F_k^M = 0$, $\tilde{F}_k^M = 0$.

Taux d'injection : $\varepsilon^V = 0.5$, $\tilde{\varepsilon}^V = 0.532$; $\varepsilon^M = 0$, $\tilde{\varepsilon}^M = 0$.

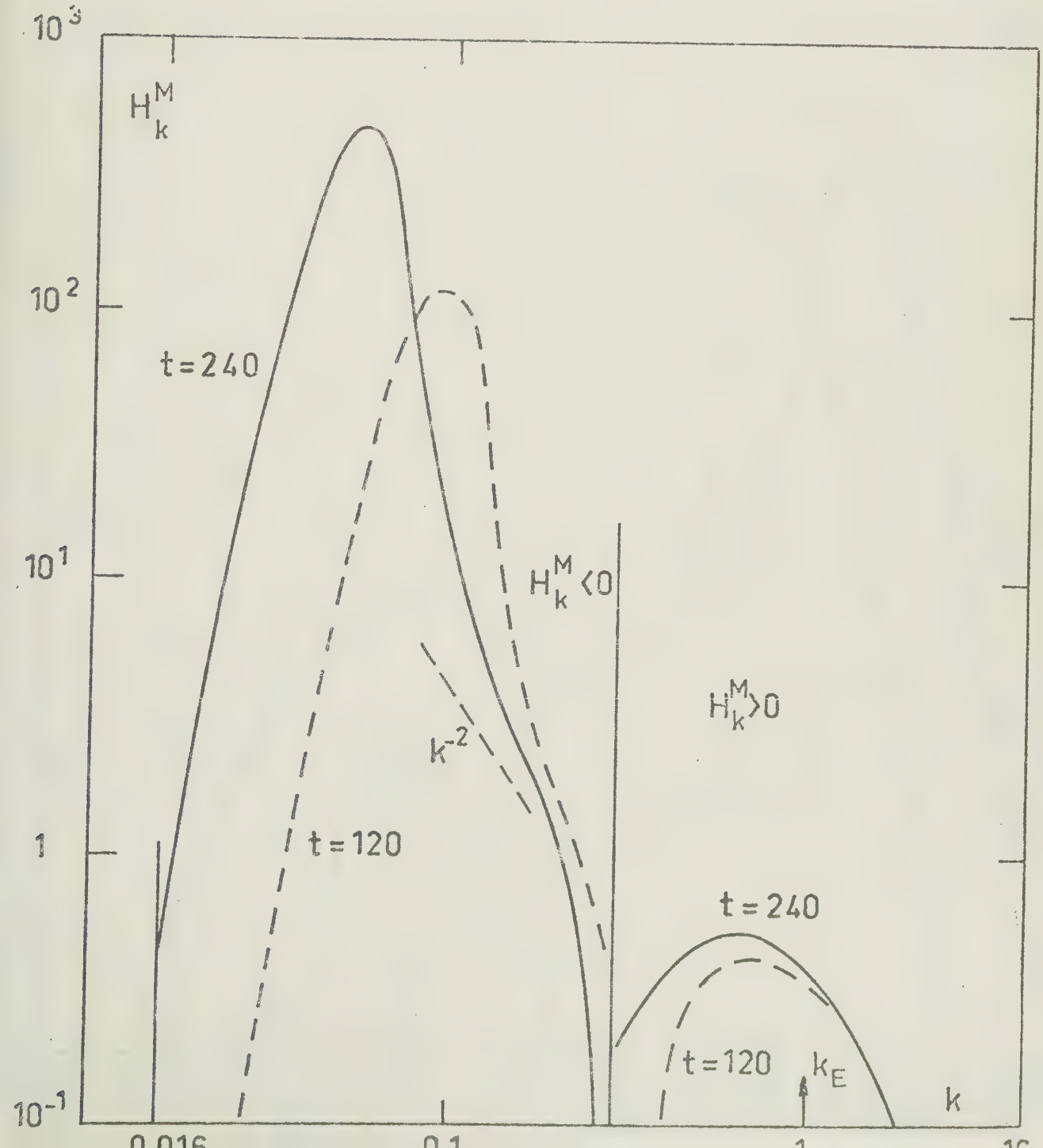


FIGURE 8 - Injection d'énergie et d'hélicité cinétiques uniquement.

Le spectre d'énergie magnétique est représenté à t = 120 et t = 240.

Les conditions sont les mêmes que pour la figure 7.

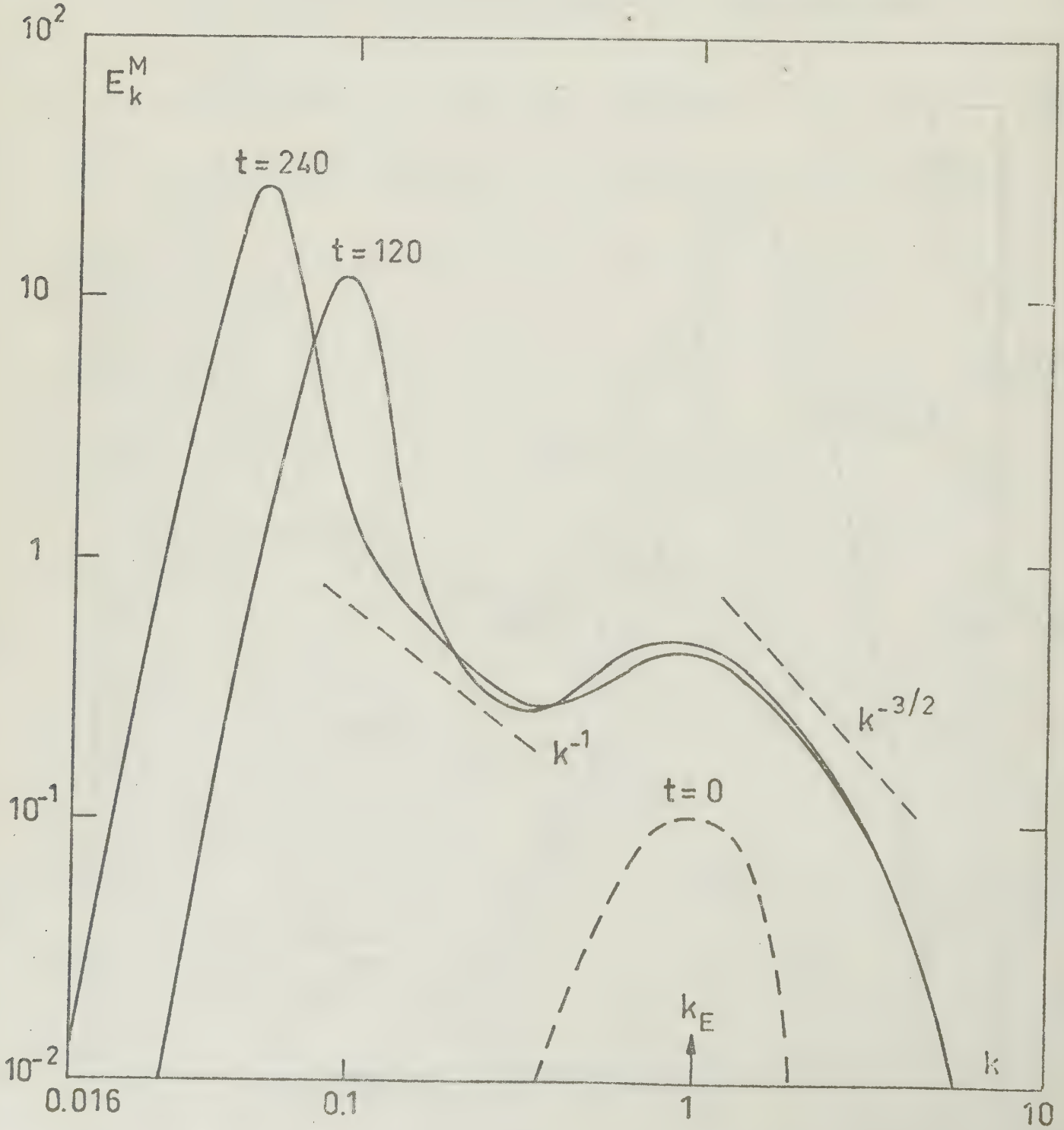
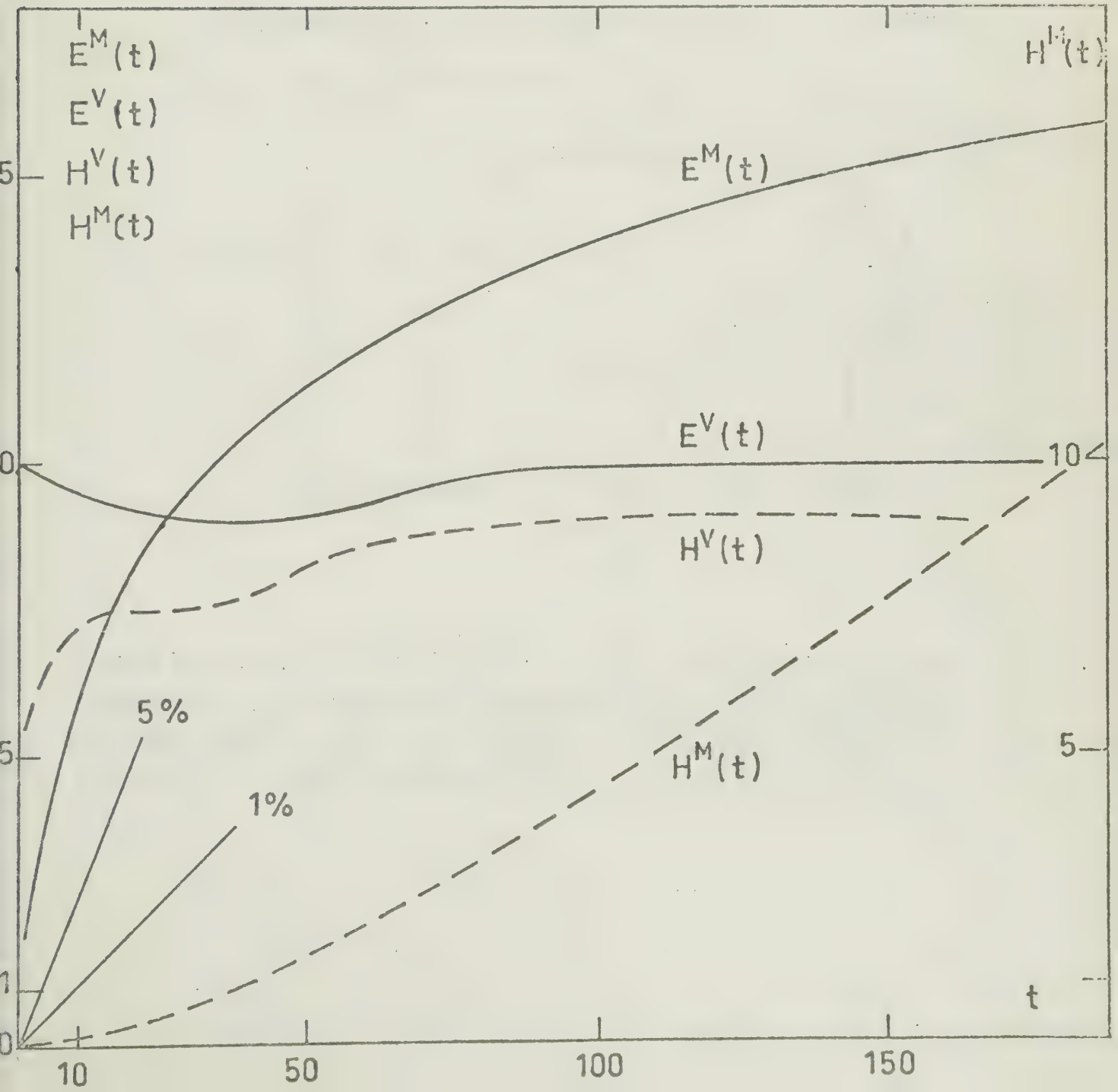


FIGURE 9 - Injection d'énergie et d'hélicité cinétiques uniquement.

Variation des énergies et hélicités totales. Remarquer l'absence de saturation de l'hélicité magnétique totale (taux de croissance $\frac{d\langle H^M(t)\rangle}{dt} \simeq 0.065$).
La croissance de l'énergie magnétique pour un rendement de dynamo de 1% et 5% est aussi indiquée (l'énergie magnétique totale croit approximativement comme $t^{1/3}$).

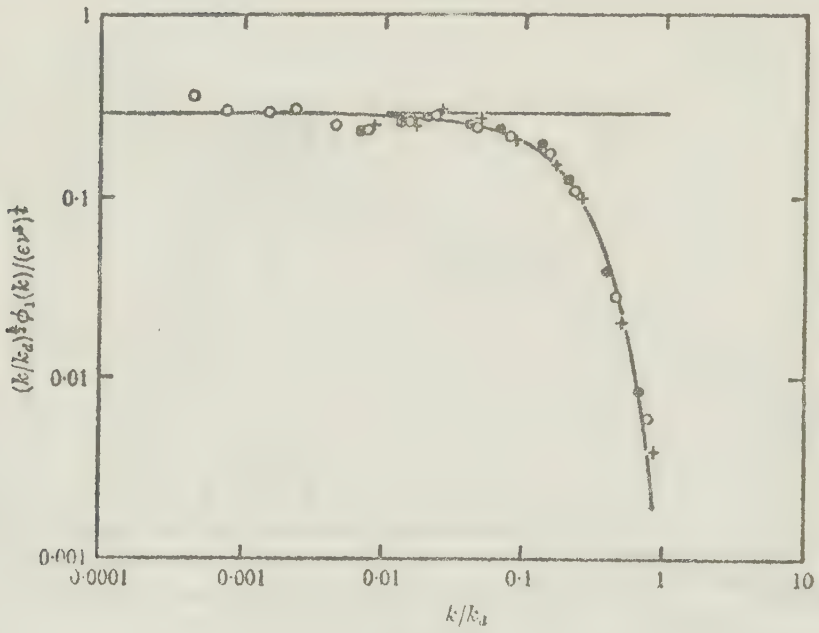
Les conditions sont les mêmes que pour la figure 7.



Appendice A1 - Turbulence expérimentale et modèles théoriques : quelques points de comparaison.

Cet appendice tente de rappeler en quelques figures le bon accord des résultats théoriques obtenus au moyen des équations spectrales de différents modèles avec des résultats expérimentaux concernant la turbulence homogène isotrope.

Figure a : Spectre de Kolmogorov et zône de dissipation

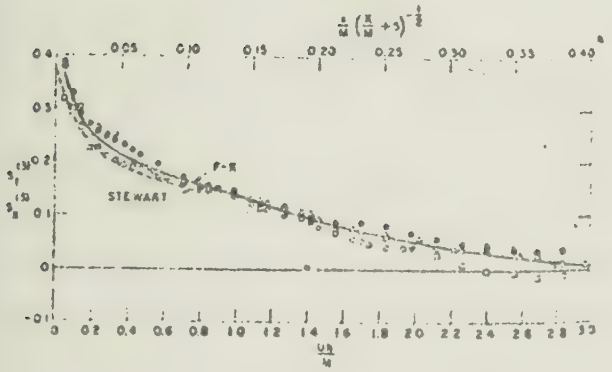


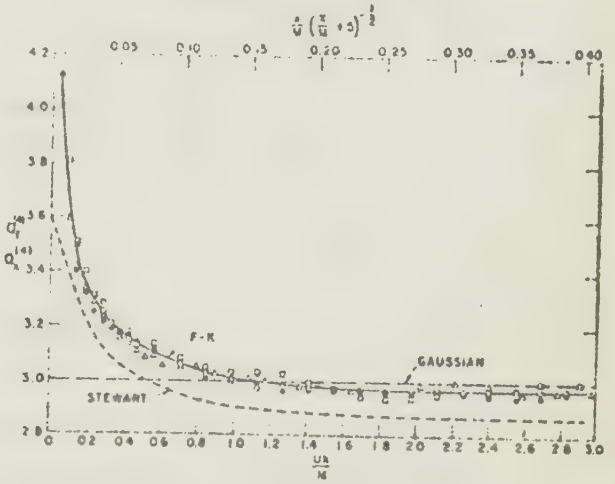
(a)

Les points expérimentaux sont de Grant et al (1962). La courbe en trait continu est obtenue par Kraichnan (1966) avec le modèle LHDI (Lagrangian-history direct interaction) ($k_d = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$, où ε est le taux d'injection et ν la viscosité). Remarquer la coïncidence des deux zones de dissipation.

Figures b et c : Moments d'ordre trois et quatre de la vitesse.

La figure b donne le coefficient d' asymétrie (temporel et spatial $S_t^{(3)}$ et $S_x^{(3)}$) dans le cas de turbulence de grille (espacement M des barreaux), mesuré par Frenkiel et Klebanoff (1967) et Stewart (1951). Noter l'incertitude sur $S^{(3)}$ vers l'origine.

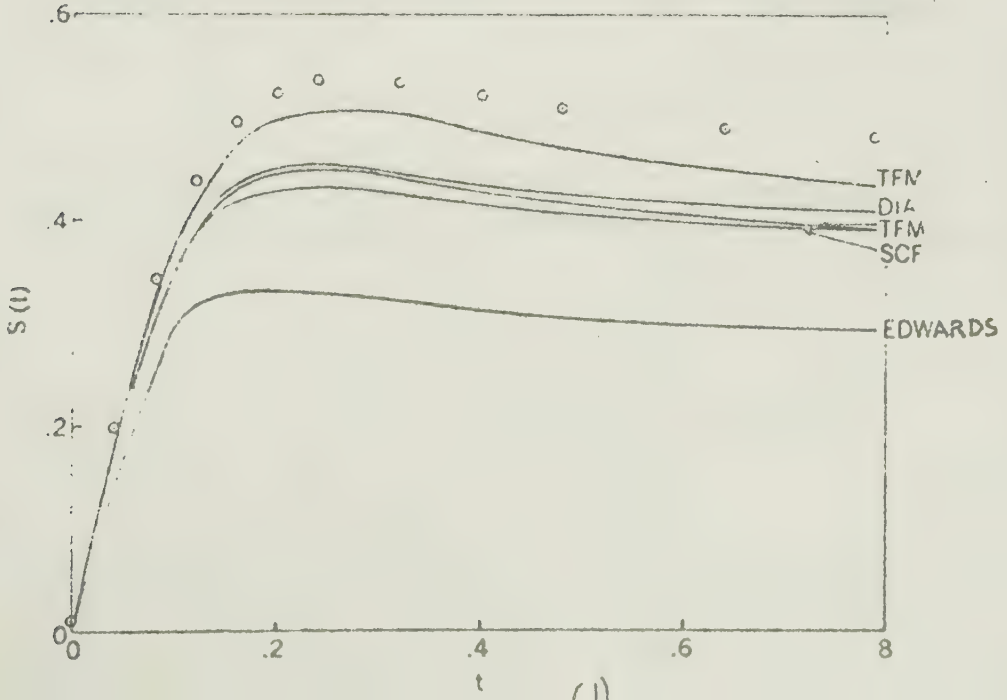




(c)

figure d : coefficient d'asymétrie.

La figure compare l'évolution du coefficient d'asymétrie à partir d'une situation initiale gaussienne de modèles (Self Consistent Field, SCF, (Herring 1966), Direct Interaction Approximation , DIA, (Kraichnan 1966), Test Field Model (Kraichnan 1971), modèle d'Edwards (1964)) avec la résolution numérique directe des équations de Navier Stokes (Orszag et Patterson, 1971) (points encerclés).



(d)

Un accord analogue entre les valeurs expérimentales et théoriques est obtenu avec l'approximation de l'amortissement turbulent, seule utilisée dans le présent travail.

Origine des figures

(a) Orszag (1970)

(b) et (c) Frenkiel et Klebanoff (1967)

(d) Herring et Kraichnan (1971)

Références

EDWARDS, S.F., 1964, J. Fluid Mech. 18, 239.

FRENKIEL, F.M. et KLEBANOFF, P.S., 1967, Phys. of Fluids, 10, 507.

GRANT, H.L., STEWART, R.W. et MOILLIET, A, 1962, J. Fluid Mech. 12, 241.

HERRING, J.R., 1966, Phys. Fluids 9, 2106.

HERRING, J.R. et KRAICHNAN, R.H., 1971, Lectures Notes in Physics n° 12, Springer Verlag 1972, P148.

KRAICHNAN, R.H., 1966, Phys. Fluids 9, 1728.

KRAICHNAN, R.H., 1971, J. Fluid Mech. 47, 513.

ORSZAG, S.A., 1970, J. Fluid Mech. 41, 363.

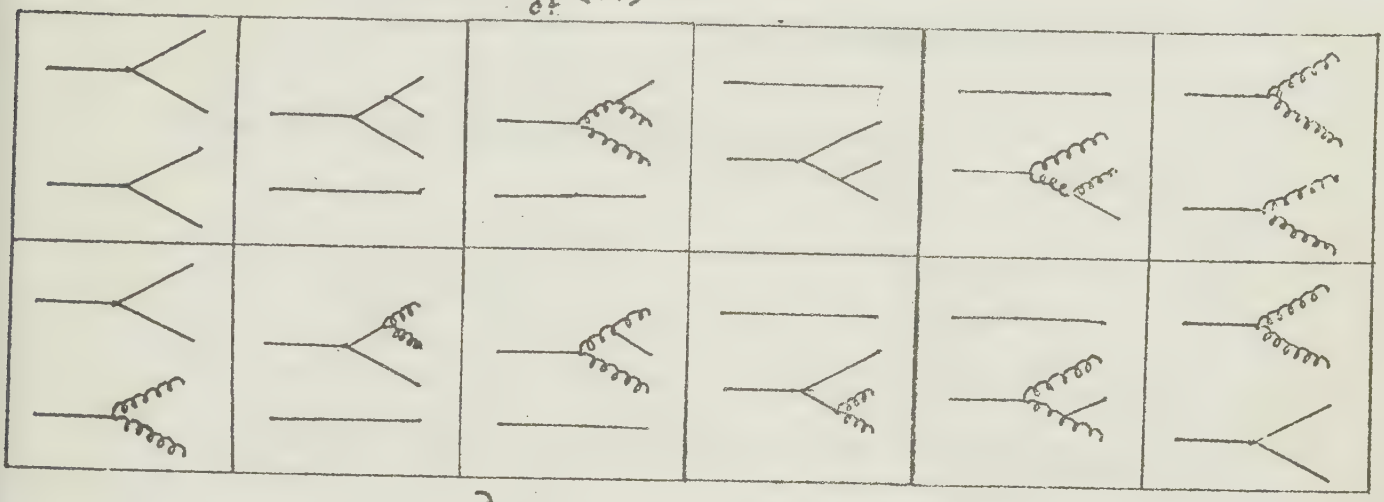
ORSZAG, S.A. et PATTERSON, G.S., 1971, Lectures Notes in Physics, n°12, Springer Verlag 1972, P127.

STEWART, R.W., 1951, Proc. Canb. Phil. Soc. 47, 146.

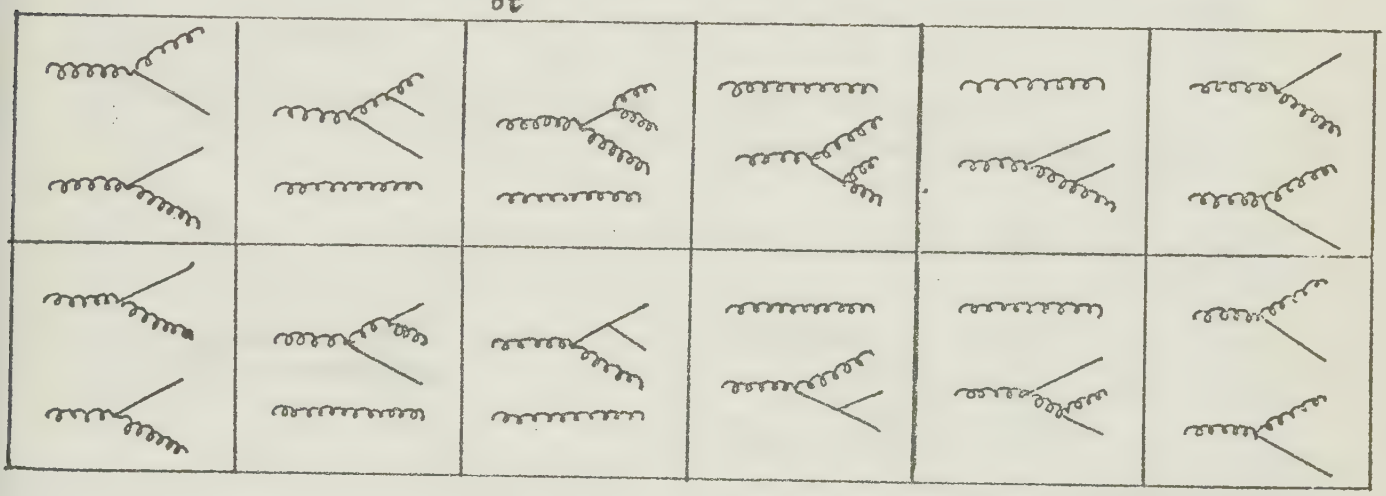
A2. Compléments sur les équations spectrales.

1) Représentation diagrammatique des différents termes des équations spectrales

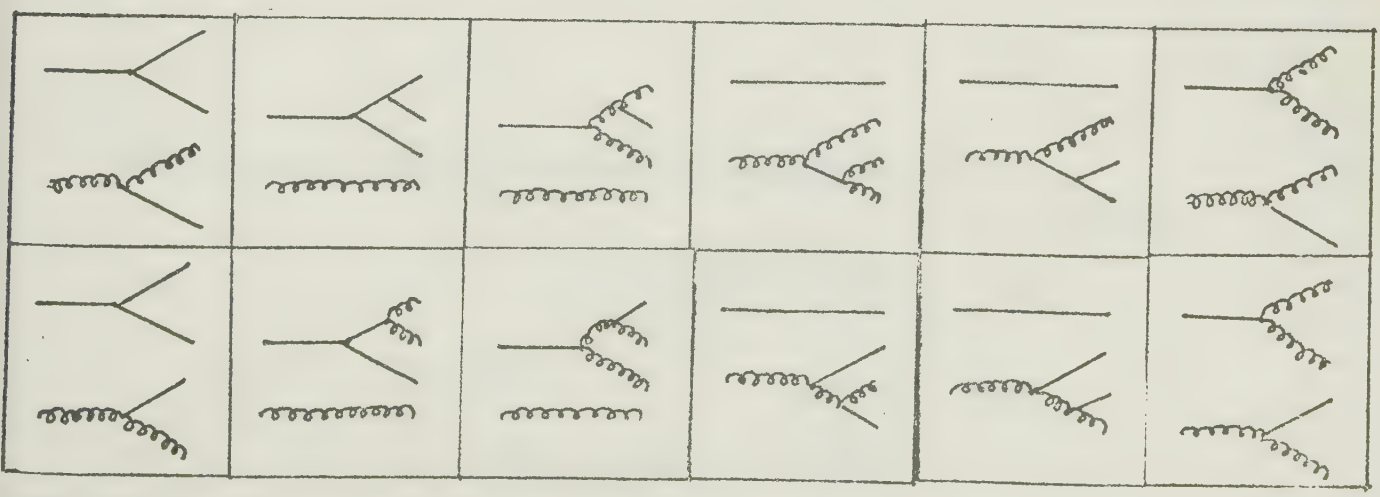
a) Têrmes contribuant à $\frac{\partial}{\partial t}\langle vv\rangle$



b) Termes contribuant à $\frac{\partial}{\partial t}\langle bb\rangle$



c) Termes contribuant à $\frac{\partial}{\partial t}\langle vb\rangle$



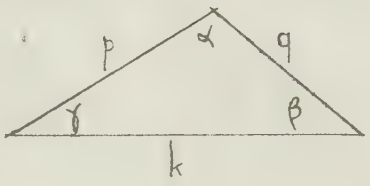
NOTA BENE: ces diagrammes ne servent qu'á classer les différents termes et ne sont en aucune façon utilisés pour un développement de pertubation.

En l'absence d'hélicité croisée ($\langle vb\rangle = 0$) seuls interviennent les six diagrammes du haut de a) et b).

2) Coefficients géométriques

Soit un triangle de côtés k, p, q et α, β, γ, les angles opposés à ces côtés. On définit :

$x = \cos\alpha,$
$y = \cos\beta,$
$z = \cos\gamma,$



on vérifie que :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2xyz.$$

Les coefficients géométriques intervenant dans les équations spectrales sont définis par :

$$b_{kpq} = \frac{p}{k}(xy + z^3)$$

$$c_{kpq} = \frac{p}{k} z (1 - y^2) = z(x + yz),$$

Cf. Kraichnan et Nagarajan (1967)

$$h_{kpq} = \frac{p}{k}(z + xy) = y^2,$$

$$j_{kpq} = \frac{p}{k} z (1 - x^2),$$

$$e_{kpq} = x(1 - z^2),$$

$$f_{kpq} = z - xy - 2zy^2$$

Tous ces coefficients s'expriment à l'aide des seuls coefficients b et c :

$$h_{kpq} = \frac{p}{k} c_{kpq} + \frac{p^2}{kq} c_{kqp},$$

$$j_{kpq} = \frac{p^2}{k^2} c_{pkq},$$

$$e_{kpq} = \frac{p}{q} c_{pqk}$$

$$f_{kpq} = \frac{k}{p} c_{kpq} - c_{kqp}$$

On a aussi les relations :

$$k^2 b_{kpq} = p^2 b_{pkq} \quad \text{et} \quad k^2 h_{kpq} = p^2 h_{pkq}.$$

3) Formules utiles pour l'étude des effets non locaux

Si l'on passe des coordonnées bipolaires (p,q) aux coordonnées polaires (q,β) ou (p,γ), il faut utiliser :

$$dp\, dq = \frac{kq}{p} \sin\beta\, d\beta\, dq \quad , \quad dp\, dq = \frac{kp}{q} \sin\gamma\, d\gamma\, dp.$$

Le calcul des coefficients de transport fait souvent intervenir les deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \sin^3\beta\, d\beta = \frac{4}{3} \quad ; \quad \int_0^{\pi} \sin^3\beta \cos^2\beta\, d\beta = \frac{4}{15}$$

Les effets non locaux correspondent à des triangles (k,p,q) très aplatis. Dans les trois cas possibles, on donne les développements les plus utiles :

a) $k \ll p \simeq q$

$$p = q\,(1 - \frac{k}{q}\cos\beta + 0\,(\frac{k^2}{q}2))$$

$$x = 1 \quad -\frac{k^2}{2q}2 \quad \sin^2\beta + 0\,(\frac{k^3}{q}3)$$

$$y = \cos\beta$$

$$z = -\cos\beta \quad + \frac{k}{q}\sin^2\beta + 0\,(\frac{k^2}{q}2)$$

$$dp\,dq = k\,dq\,d\beta\left(\sin\beta + \frac{k}{q}\sin\beta\cos\beta + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)\right)$$

$$(xy + z^3)\,dp\,dq = k\,dq\,d\beta\left(\cos\beta\sin^3\beta + \frac{4k}{q}\sin^3\beta\cos^2\beta + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)\right)$$

$$z(1 - y^2)\,dp\,dq = kdq\,d\beta\left(-\cos\beta\sin^3\beta + \frac{k}{q}\sin^5\beta - \frac{k}{q}\sin^3\beta\cos^2\beta + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)\right)$$

$$(z + xy)\,dp\,dq = k\,dq\,d\beta\left(\frac{k}{q}\sin^3\beta + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)\right)$$

$$z(1 - x^2)\,dp\,dq = k\,dq\,d\beta\left(\frac{k^2}{q^2}\sin^3\beta\cos\beta + O\left(\frac{k^3}{q^3}\right)\right)$$

$$x(1 - z^2)\,dp\,dq = k\,dq\,d\beta\left(\sin^3\beta + \frac{3k}{q}\sin^3\beta\cos\beta + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)\right)$$

$$(x - xy - 2zy^2)\,dp\,dq = k\,dq\,d\beta\left(-2\cos\beta\sin^3\beta + \frac{k}{q}(-\sin\beta + 2\sin^5\beta) + \cdots + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)\right)$$

b) $\underline{p \ll k \simeq q}$

$$q = k\left(1 - \frac{p}{k}\cos\gamma + O\left(\frac{p^2}{k^2}\right)\right)$$

$$x = -\cos\gamma + \frac{p}{k}\sin^2\gamma + O\left(\frac{p^2}{k^2}\right)$$

$$y = 1 - \frac{p^2}{2k^2}\sin^2\gamma + O\left(\frac{p^3}{k^3}\right)$$

$$z = \cos\gamma$$

$$dp\,dq = pdpd\gamma\left(\sin\gamma + \frac{p}{k}\sin\gamma\cos\gamma + O\left(\frac{p^2}{k^2}\right)\right)$$

$$(xy + z^3)\,dp\,dq = p\,dp\,d\gamma\left(-\cos\gamma\sin^3\gamma + \frac{p}{k}(\sin^3\gamma - \sin^3\gamma\cos^2\gamma) + O\left(\frac{p^2}{k^2}\right)\right)$$

$$z(1 - y^2)\,dp\,dq = pdpd\gamma\left(\frac{p^2}{k^2}\sin^3\gamma\cos\gamma + O\left(\frac{p^3}{k^3}\right)\right)$$

$$(z + xy)\,dp\,dq = pdpd\gamma\left(\frac{p}{k}\sin^3\gamma + O\left(\frac{p^2}{k^2}\right)\right)$$

$$z(1 - x^2)\,dp\,dq = pdpd\gamma\left(\cos\gamma\sin^3\gamma + \frac{3p}{k}\sin^3\gamma\cos^2\gamma + O\left(\frac{p^2}{k^2}\right)\right)$$

$$x\,(1 - z^2)\,dp\,dq = pdpd\gamma\left(-\cos\gamma\sin^3\gamma + \frac{p}{k}\,(\sin^4\gamma - \sin^3\gamma\cos^2\gamma + O(\frac{p}{k}2)^2\right)$$

$$(z - xy - 2zy^2)\,dpdq = pdpd\gamma\left(-\frac{p}{k}\sin^3\gamma + O(\frac{p}{k}2)^2\right)$$

c) $q \ll k \simeq p$

$$p = k\left(1 - \frac{q}{k}\cos\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

$$x = -\cos\beta + \frac{q}{k}\sin^2\beta + O(\frac{q}{k}2)^2$$

$$y = \cos\beta$$

$$z = 1 - \frac{q}{2k}2^2\sin^2\beta + O(\frac{q}{k}2)^2$$

$$dp\,dq = qdqd\beta\left(\sin\beta + \frac{q}{k}\sin\beta\cos\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

$$(xy + z^3)\,dp\,dq = q\,d\,q\,d\beta\left(\sin^3\beta + 2\frac{q}{k}\sin^3\beta\cos\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

$$z\,(1 - y^2)\,dp\,dq = q\,d\,q\,d\beta\left(\sin^3\beta + \frac{q}{k}\sin^3\beta\cos\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

$$(z + xy)\,dp\,dq = q\,d\,q\,d\beta\left(\sin^3\beta + \frac{2q}{k}\sin^3\beta\cos\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

$$z\,(1 - x^2)\,dp\,dq = q\,d\,q\,d\beta\left(\sin^3\beta + 3\frac{q}{k}\sin^3\beta\cos\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

$$x\,(1 - z^2)\,dp\,dq = q\,d\,q\,d\beta\left(-\frac{q}{k}2^2\sin^3\beta\cos\beta + O(\frac{q}{k}3)^3\right)$$

$$(z - xy - 2zy^2)\,dp\,dq = q\,d\,q\,d\beta\left(\sin^3\beta + O(\frac{q}{k}2)^2\right)$$

4) A propos de facteurs 1/2

Les théories statistiques de la turbulence sont passées souvent par des phases où les résultats étaient donnés à un facteur numérique près... (voir par exemple Kraichnan, 1958, comparé à Krai-

chnan et Nagarajan, 1967, ou Moffatt, 1974, comparé à 1970 a , et notre théorie de la turbulence MHD ne prétend pas échapper à cet inconvénient. Outre les possibles erreurs numériques difficiles à déceler, la raison essentielle de cette éventualité provient de l'absence d'accord général pour les définitions des densités des énergies et des hélicités :

$$\langle E^V \rangle = \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle \qquad \text{(Moffatt, Kraichnan)}$$

$$\langle E^V \rangle = \langle v^2 \rangle \qquad \text{(Lesieur, 1973, André et Lesieur 1975, Pouquet, André et Lesieur 1974)}$$

$$\langle H^V \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{v}. \nabla_\wedge \vec{v} \rangle \qquad \text{(Frisch, Léorat et Pouquet 1975)}$$

$$\langle H^V \rangle = \langle \vec{v}. \nabla_\wedge \vec{v} \rangle \qquad \text{(Moffatt)}$$

Si les facteurs numériques devant l'hélicité et l'énergie ne sont pas les mêmes, le rapport de ces deux facteurs apparaît comme coefficient parasite dans les calculs. Or, le facteur $\frac{1}{2}$ devant l'énergie, sans fondement autre qu'historique ($E = \frac{1}{2} mv^2$) semble difficile à éliminer si l'on veut comparer entre eux les résultats déjà publiés par de nombreux auteurs. Moffatt (1969) ne met pas de facteur $\frac{1}{2}$ pour l'hélicité cinétique, mais cette définition n'est, pour l'instant, connue et utilisée que par un petit nombre de spécialistes et elle peut être légèrement modifiée.

Le tableau ci-dessous résume les relations les plus utiles pour la comparaison des équations spectrales non magnétiques, selon les définitions utilisées.

Orszag (1974)	André et Lesieur (1975)	Relations
$\langle \frac{1}{2} v^2 \rangle = \int_0^\infty E'^V_k \, dk$ $\langle \frac{1}{2} \vec{v}.\vec{\nabla}\wedge\vec{v} \rangle = \int_0^\infty H'^V_k \, dk$	$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty E''^V_k \, dk$ $\langle \vec{v}.\vec{\nabla}\wedge\vec{v} \rangle = \int_0^\infty H''^V_k \, dk$	$E''^V_k = 2 E'^V_k$ $H''^V_k = 2 H'^V_k$
$\mu'_k = C'_S \left(\int_0^k q^2 E'^V_q \, dq \right)^{1/2}$	$\mu''_k = C''_S \left(\int_0^k q^2 E''^V_q dq \right)^{1/2}$	$\mu''_k = \mu'_k$ $C''_S = \frac{C'_S}{\sqrt{2}}$
$E'^V_k = C'_K \left(\varepsilon'^V\right)^{2/3} k^{-5/3}$	$E''_k = C''_K \left(\varepsilon''^V\right)^{2/3} k^{-5/3}$	$\varepsilon''^V = 2\varepsilon'^V$ $C''_K = \sqrt[3]{2}\, C'_K$
$C'_K = 1.4$ $C'_S = 0.361$	$C''_K = 1.76$ $C''_S = 0.109 \, (C''_K)^{3/2}$ $= 0.255$	$C_S = 0.109 \, C_K^{3/2}$ (André Lesieur, 1975)

A3. Compléments sur l'hélicité.

THE PHYSICS OF FLUIDS VOLUME 16, NUMBER 8 AUGUST 1973

Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence

A. Brissaud
Ecole Nationale Superieure de l'Aeronautique et de l'Espace, Toulouse, France

U. Frisch
Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Nice, 06300 Nice, France

J. Leorat
Observatoire de Meudon, 92190 Meudon, France

M. Lesieur
Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Nice, 06300 Nice, France

A. Mazure
Observatoire de Meudon, 92190 Meudon, France
(Received 12 June 1972; final manuscript 7 March 1973)

Based on total helicity conservation in inviscid incompressible flows, the existence of simultaneous energy and helicity cascades is envisaged.

Starting with the work of Steenbeck *et al.*,[1] the question of isotropic turbulent flows which are not invariant under plane reflections has attracted considerable attention in recent years. Most of this work has focused on the problem of the passive turbulent dynamo, i.e., the generation of large scale mean magnetic fields by prescribed turbulent flows for which $\langle \mathbf{v}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{v}\rangle \neq 0$; such flows are said to possess net helicity.[1,2]

In this note we shall be concerned with the dynamics of the turbulent flow itself when helicity is present. This fully nonlinear problem has not been given much attention (cf., however, Refs. 3 and 4). Since there is presently no satisfactory theory of fully developed turbulence starting from first principles, we shall examine the influence of helicity from a phenomenological viewpoint.

The classical phenomenological theory uses as a starting point the conservation of the total energy

$$E=\tfrac{1}{2}\int v^2\,dx\,dy\,dz \tag{1}$$

for inviscid flows and the assumption that the nonlinear terms in the Navier–Stokes equations give rise to an energy transfer from the large eddies to the smaller ones through a local energy cascade. Under these assumptions, a well-known argument leads to the Kolmogoroff law for the energy spectrum of isotropic turbulence in the inertial range: $E(k)\sim\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$, where ϵ is the rate of transfer of energy.

There is, however, another conserved quadratic quantity in inviscid incompressible three-dimensional flows, namely, the total *helicity*[2]

$$H=\int \mathbf{v}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{v}\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Indeed, assuming that the velocity field vanishes at infinity and using the identity

$$\int \mathbf{A}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{B}\,dx\,dy\,dz=\int \mathbf{B}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{A}\,dx\,dy\,dz \tag{3}$$

valid for vector-fields vanishing at infinity, we obtain

$$\frac{dH}{dt}=2\int \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{curl}\mathbf{v}\,dx\,dy\,dz. \tag{4}$$

Then, using the vorticity equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{curl}\mathbf{v}=\mathrm{curl}(\mathbf{v}\times\mathrm{curl}\mathbf{v}), \tag{5}$$

and identity (3), finally, we obtain

$$\frac{dH}{dt}=2\int \mathrm{curl}\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathrm{curl}\mathbf{v})\,dx\,dy\,dz=0. \tag{6}$$

To the conserved helicity one may associate a

helicity spectrum $H(k)$, where $H(k)\,dk$ is the contribution from wavenumbers between k and $k+dk$ to the mean helicity per unit volume $\langle \mathbf{v}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{v}\rangle$. $H(k)$, unlike $E(k)$, is a pseudoscalar and not definite positive; however, using the definite-positiveness of the spectral velocity autocorrelation tensor, it may be shown that

$$|H(k)|\leq kE(k). \tag{7}$$

The situation is somewhat reminiscent of two-dimensional turbulence where both the mean energy and mean-square vorticity are conserved; for two-dimensional turbulence this leads to two distinct possibilities: an energy cascade and an enstrophy cascade, the energy spectrum following, respectively, a $k^{-5/3}$ and a k^{-3} law.[5,6] It must be stressed, however, that in three dimensions energy can be present without helicity whereas in two dimensions energy and enstrophy are always present simultaneously.

In view of the conservation of helicity, it is interesting to look for the possibility of a helicity cascade in three-dimensional turbulence. If there is a helicity inertial range, where $E(k)$ and $H(k)$ depend only on k and the rate of transfer of helicity η, the energy and helicity spectra must, for dimensional reasons, take the form[7]

$$E(k)\sim\eta^{2/3}k^{-7/3}, \qquad H(k)\sim\eta^{2/3}k^{-4/3}, \tag{8}$$

The possibility of helicity cascades corresponding to local helicity transfer will now be investigated more closely using the simple dynamical argument of Kraichnan.[6] Let $\Pi(k)$ and $\Sigma(k)$ denote the total rate of energy and helicity transfer from all wavenumbers $<k$ to all wavenumbers$>k$. Following Kraichnan, we assume that $\Pi(k)$ $[\Sigma(k)]$ is proportional to the ratio of the total energy (helicity) $\sim kE(k)$ $[\sim kH(k)]$ available in wavenumbers of the order of k to some effective distortion time $\tau(k)$ of flow structures of scale k^{-1} due to the shearing action of all wavenumbers $\lesssim k$. The distortion time, which is the same for energy and helicity transfer, is given by[6]

$$\tau(k)\sim\left(\int_0^k p^2E(p)\,dp\right)^{-1/2} \tag{9}$$

We therefore write

$$\Pi(k)\sim kE(k)/\tau(k); \qquad \Sigma(k)\sim kH(k)/\tau(k). \tag{10}$$

We shall say that there is an energy cascade (helicity cascade) if in some "inertial" range, $\Pi(k)$ $[\Sigma(k)]$ is independent of the wavenumber, i.e., $\Pi(k)\equiv\epsilon[\Sigma(k)\equiv\eta]$, where ϵ $[\eta]$ is the energy [helicity] transfer rate. If we exclude the trivial case $\epsilon=\eta=0$ and the already known case $\eta=0$, two new possibilities remain.

(a) Simultaneous energy and helicity cascades: $\epsilon\neq0$, $\eta\neq0$. Using Eqs. (9) and (10) we obtain the power-law solutions

$$E(k)\sim\epsilon^{2/3}k^{-5/3}; \qquad H(k)\sim\eta\epsilon^{-1/3}k^{-5/3}. \tag{11}$$

It is easily checked that the dominant contribution to $\tau(k)$ comes from $p\sim k$ in agreement with the idea of localness of both energy and helicity transfer. Notice that solution (11) is compatible with inequality (7) only for large enough k.

(b) Pure helicity cascade with no energy cascade: $\epsilon=0$, $\eta\neq0$. $\Sigma(k)=\eta$ whereas $\Pi(k)\to0$ when $k\to\infty$. Assuming power-law solutions, we obtain a class of solutions

$$E(k)\sim k^{-n}, \qquad H(k)\sim k^{-(5-n)/2}, \qquad \tfrac{5}{3}<n\leq\tfrac{7}{3}. \tag{12}$$

For all solutions, the dominant contributions to $\tau(k)$ still come from $p\sim k$. If we impose the statement that the solution (12) depends only on η and k, we recover Eqs. (8) corresponding to $n=\frac{7}{3}$.

However, a problem arises with a pure helicity cascade: it appears difficult to inject helicity into the fluid without at the same time injecting some energy. Possibly this difficulty can be overcome, as for two-dimensional turbulence, by assuming that energy and helicity are fed into the fluid at a certain wavenumber k_i; helicity then cascades toward large wavenumbers according to (8) while energy cascades toward small wavenumbers (inverse cascade) according to the usual Kolmogoroff law. In the energy inverse cascade range, $H(k)$ is proportional to $\epsilon^{2/3}k^{-2/3}$ and $\Sigma(k)\to0$ when $k\to0$, so there is no helicity transfer.

It may be asked under what conditions solutions of case (b) if they exist, do arise. When the injection of energy and helicity occur at a fixed wavenumber k_i, a possible answer is that case (b) solutions appear when the helicity injection rate exceeds the critical value which is required by the compatibility of (7) and (11) for $k=k_i$, above which stationary solutions of case a cannot exist anymore.

Since all the considerations in this note are purely phenomenological and cannot give conclusive evidence for the existence of helicity cascades, especially of case (b), we intend to test them numerically on a model of turbulence which leads to closed equations for the evolution of $E(k)$ and $H(k)$. As for experimental evidence, we believe that atmospheric turbulence may be a good place to look, because the rotation of the earth combined with the gradients of turbulent intensity produces helicity.

It is a pleasure for us to thank Dr. R. H. Kraichnan for very helpful comments and Professor E. Spiegel for stimulating discussions.

[1]M. Steenbeck, F. Krause, and V. Radler, Z. Naturforsch. A 21, 364 (1966).
[2]H. K. Moffat, J. Fluid Mech. 35, 117 (1969).
[3]S. I. Vainshtein, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 612 (1971) [Sov. Phys.-JETP 34, 327 (1972)].
[4]A. Mazure, Thesis, Observatoire de Meudon, 1972.
[5]R. H. Kraichnan, Phys. Fluids 10, 1417 (1967).
[6]R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 47, 525 (1971).
[7]M. Lesieur, U. Frisch, and A. Brissaud, Ann. Geophys. 27, 151 (1971).

APPENDICE A_3 (Suite)

COMPLEMENTS SUR L'HELICITE

1) Signification géométrique de l'hélicité

Les champs de vecteurs $\vec{V}$ qui dérivent d'un gradient ou qui sont localement parallèles à un champ de gradient ont une densité d'hélicité nulle.

Si la densité d'hélicité est non nulle en un point, les lignes de champ du voisinage s'enroulent autour de la ligne de champ passant par le point considéré. Plus précisément, montrons que la limite lorsque $r \longrightarrow 0$ de la circulation de $\vec{V}$ le long du bord ∂D du disque $D(r)$ de rayon r et d'axe $\vec{V}_o = \vec{V}(o)$ est fonction de la densité d'hélicité en O :

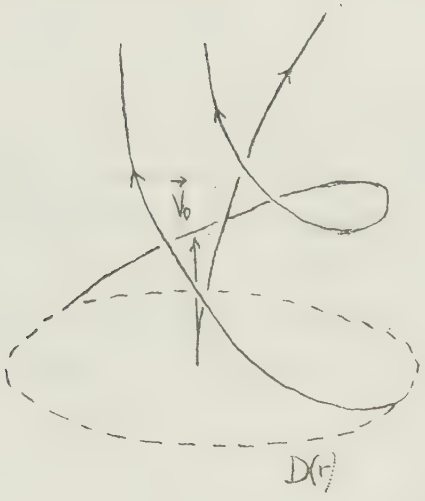
$$C(r) = \oint_{\partial D} \vec{V}(r).\, d\vec{\ell} = \int_D (\nabla \wedge \vec{V}).\, d\vec{S}$$

$$C(r) = \int_{\partial D} (\nabla \wedge \vec{V}) \frac{\vec{V}_o}{|\vec{V}_o|}\, dS$$

Par suite :

$$\lim_{r \to o} \frac{C(r)}{\pi r^2} = \frac{\vec{V}_o . (\nabla \wedge \vec{V})_o}{|\vec{V}_o|}$$

Moffatt (1969) a montré que l'hélicité d'un écoulement était très simplement reliée au degré de connectivité des lignes de vorticité.



2) Génération d'hélicité moyenne (cas non magnétique)

Nous n'avons pas jusqu'ici abordé la question de l'origine de l'hélicité cinétique. Le mécanisme le plus couramment invoqué est l'action combinée d'une rotation rigide et d'un gradient d'intensité de la turbulence (Steenbeck, Krause et Rädler, 1966). Montrons que l'hélicité cinétique, conservée dans le volume de l'écoulement, peut être injectée aux frontières de celui-ci. Dans un référentiel en rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega}$, les équations d'Euler ($\nu = 0$) s'écrivent =

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\nabla\,\vec{v} = -2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} - \nabla p$$

$$\nabla.\vec{v} = 0$$

L'hélicité cinétique

$$H^V = \frac{1}{2} \int \vec{v}.\nabla\wedge\vec{v}\; d^3r$$

est encore un invariant si intègre sur tout l'espace en supposant $\vec{v} = 0$ à l'infini. Si cependant, on intègre dans un domaine D; de frontière ∂D , on obtient :

$$\frac{d}{dt} H^V = \frac{1}{2}\int_{\partial D}\left(\frac{v^2}{2}-p\right)\nabla\wedge\vec{v}.d\vec{S} - \frac{1}{2}\int_{\partial D}\vec{v}.\nabla\wedge\vec{v}\,\vec{v}.d\vec{S} - \int_{\partial D}\vec{v}.\vec{\Omega}\;\vec{v}.d\vec{S}$$

Le flux d'hélicité comprend des termes cubiques dont la valeur moyenne s'annulle si l'on considère par exemple une turbulence gaussienne (initialement), et un terme quadratique en la vitesse et linéaire en la rotation. Sous l'action de celle-ci, il se produit une injection d'hélicité cinétique moyenne. Si maintenant on fait un bilan par unité de volume, il vient par analyse dimensionnelle

$$\frac{d\ <H^V>}{dt} \approx \frac{\Omega}{L} < \frac{v^2}{2} >$$

où L est échelle caractéristique du gradient de l'énergie cinétique moyenne $<\frac{v^2}{2}>$.

Signalons enfin que les ondes d'inertie dans un fluide en rotation transportent de l'hélicité et de l'énergie cinétiques (ce sont des ondes planes transverses polarisées circulairement = ondes d'hélicité) et qu'elles pourraient être à l'origine d'un mécanisme d'injection de l'hélicité en turbulence.

3) Mesure de l'hélicité de la turbulence atmosphérique

A notre connaissance, cette quantité n'a jamais été mesurée. On pourrait penser mesurer l'hélicité instantanée en un point au moyen d'un empennage susceptible de s'orienter selon le vecteur vitesse au point considéré et de tourner autour de son axe : la propriété de circulation vue en 1) se traduirait par une vitesse de rotation fonction de l'hélicité. Mais les temps de réponse d'un tel système mécanique sont bien trop élevés pour que cette mesure directe puisse être envisagée.

Avec Daniel Cadet, du Laboratoire de Météorologie dynamique, nous avons en vue une mesure de l'hélicité à partir des corrélations croisées du champ de vitesse.

Dans un écoulement turbulent homogène et isotrope, la tenseur des corrélations spatiales est :

$$\langle v_i(0)\, v_j(r)\rangle = A(r)\, \delta_{ij} + B(r)\, r_i\, r_j + \varepsilon_{ijk}\, r_k\, C(r)$$

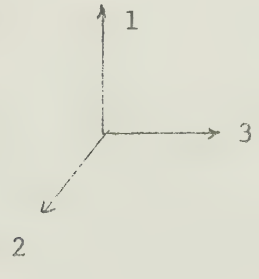
et l'hélicité moyenne est :

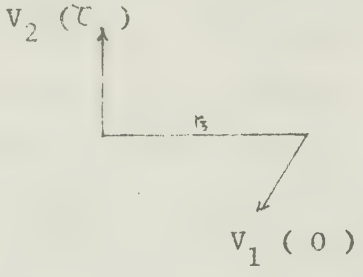
$$\frac{1}{2}\langle \vec{v}.\, \nabla_\wedge \vec{v}\rangle = 3\, C(0)$$

Pratiquement, la mesure se fait en un seul point à des instants séparés d'un intervalle τ variable : si $\overline{U_3}$ est la vitesse moyenne, on remplace la variation d'espace r par la variation temporelle τ telle que $r_3 = \overline{U_3}\,\tau$ (hypothèse de Taylor) et on obtient le tenseur de corrélation

$$\langle v_i(0)\, v_j(\tau)\rangle = \begin{bmatrix} A & r_3 C & 0 \\ -r_3 C & A & 0 \\ 0 & 0 & A + B r_3^2 \end{bmatrix}$$

et l'hélicité est proportionnelle à la pente de $\langle v_1(0)\, v_2(\tau)\rangle$ lorsque $\tau \to 0$. Les termes dûs à l'hélicité sont relatifs aux corrélations croisées :





Afin d'explorer des échelles suffisamment petites, il est nécessaire d'avoir un appareil qui ait un temps de réponse rapide. Nous utiliserons un anémomètre ultrasonique de bande passante 100 Hz qui permettra d'aller jusqu'à une distance r_3 d'environ 20 cm. L'appareil sera placé en haut d'une tour de 50 m afin d'être au-dessus de la couche limite ($h \lesssim 20$ m) où la force de Coriolis est dominée par la viscosité. Le résultat d'une telle mesure est loin d'être certain. En effet, le rapport de l'accélération de Coriolis à l'accélération due à l'advection est donné par :

$$\frac{2|\vec{\Omega} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v} \cdot \nabla \wedge \vec{v}|} \approx \frac{2 \Omega v_\ell}{v_\ell^2/\ell}$$

, où ℓ est une échelle caractéristique de tourbillon.

En vertu du théorème de l'âge du capitaine (§ 2.6),

$$\tau_\ell = \frac{\ell}{v_\ell}$$

est la durée de vie du tourbillon et on obtient

$$\frac{|2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v} \cdot \nabla \wedge \vec{v}|} \approx \tau_\ell \, \Omega ,$$

qui est bien plus petit que l'unité pour la turbulence atmosphérique. Au contraire, dans le cas de la turbulence du noyau terrestre, les tourbillons ont une durée de vie très supérieure à la journée et le paramètre ci-dessus est très supérieur à l'unité, indiquant la présence probable d'hélicité cinétique. On peut cependant rester optimiste si l'on considère un cas fameux où la détection de la force de Coriolis dans un écoulement à petite échelle n'est toujours pas définitivement écarté : c'est celui du tourbillon se formant à la bonde d'une baignoire qui se vide (Shapiro, 1962, Nature, 196, 1080-1)...

A plus grande échelle, l'influence de la force de Coriolis est manifeste dans la couche limite planétaire ($20\ m \lesssim h \lesssim 1000\ m$) dans laquelle la vitesse moyenne suit une spirale d'Ekman pour se raccorder au vent géostrophique ($h \gtrsim 1000\ m$) déterminé par le gradient de pression et la force de Coriolis, mais essentiellement bidimensionnel. En cas d'insuccès à $h = 50\ m$, il faudrait viser par exemple $h = 500\ m$, pour être certain d'être situé dans la couche limite d'Ekman dont on sait que l'hélicité doit être non nulle.

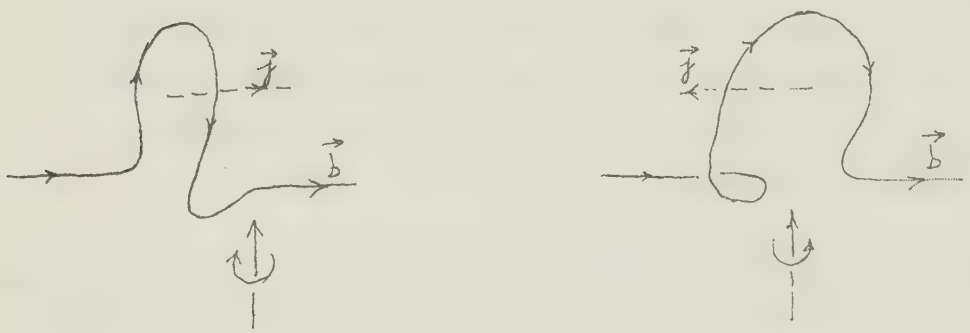
4) Un peu de vocabulaire

La non invariance par symétrie plane est un fait habituel en physique des particules élémentaires mais pas en mécanique des milieux continus ou en turbulence et il serait nécessaire de préciser le vocabulaire utilisé. Le mot hélicité ("helicity") apparaît dans Betchov (1961) et Moffatt (1969) lui donne une signification topologique. Pour qualifier une turbulence non invariante par symétrie plane, on trouve différentes expressions (classées ici par langues)

turbulence hélicitaire	non mirror symmetric turbulence	Nichtspiegelstmmetrische Turbulenz (Steenbeck, Krause et Rädler)
	helical turbulence (Moffatt)	Turbulenz mit bevorzugte Schraubensinn (Steenbeck, Krause et Rädler)
	cyclonic turbulence (Parker)	

On trouve aussi "gyrotropic turbulence" dans la traduction anglaise des auteurs soviétiques, mais ce terme est visiblement mal choisi : aucun sens de rotation n'est privilégié dans la turbulence hélicitaire.

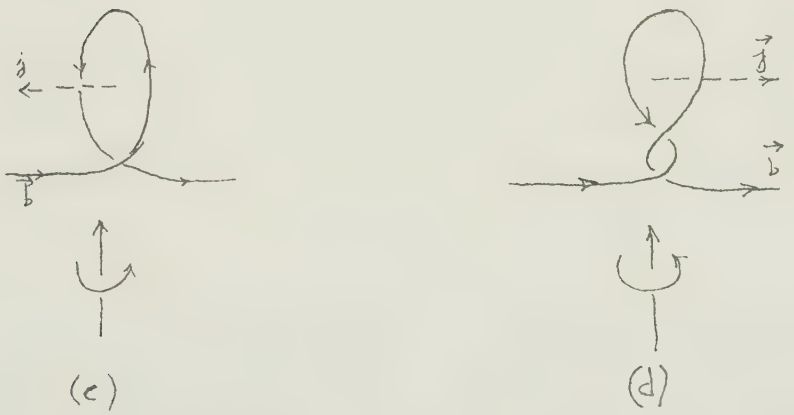
La présence d'hélicité en turbulence MHD est à l'origine de l'effet non local qui a été originellement appelé "effet α" par Steenbeck, Krause et Rädler (1966). Le choix de l'épithète α n'a aucune justification physique et c'est pourquoi Moffatt a proposé à sa place le terme "effet d'hélicité". Nous nous proposons maintenant de montrer, à l'aide de considérations phénoménologiques que l'effet α doit être qualifié de façon plus spécifique. D'après Steenbeck, Krause et Rädler (1966), l'effet α cinétique peut se visualiser au moyen de "cyclônes" élémentaires. Examinons d'abord l'action d'un cyclone à petite échelle sur un champ magnétique à grande échelle. Si le cyclone est gauche, la boucle de champ magnétique qui est formée crée un courant de même sens que le champ initial (figure a) et si le cyclone est droit, le courant créé est de sens contraire au champ (figure b).



(a) (b)

Considérant la turbulence comme un ensemble de tels cyclones, il est clair que s'il y a autant de cyclones droits que de gauches, le courant moyen sera nul, tandis que si une espèce est plus fréquente, un courant moyen est engendré, parallèle au champ magnétique à grande échelle. Nous avons vu au § 4.4.3. (équ. 4.100) que cette dernière propriété conduisait à une croissance exponentielle du champ. C'est aussi cette propriété de torsion des lignes de champ qui a été invoquée par Parker (1955), dans le cas d'une turbulence

MHD dans une sphère en rotation, pour regénérer un champ poloïdal (dans un plan passant par l'axe de rotation) à partir d'un champ toroïdal (dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation). Il faut noter que la condition sur le sens privilégié des cyclones, qui est une propriété géométrique du champ de vitesse mesurable par l'hélicité n'est pas une condition suffisante pour que l'effet α ait lieu et doit être complétée par une condition dynamique. En effet, la durée pendant laquelle le cyclone agit doit être suffisamment courte pour que le courant engendré garde toujours le même sens par rapport au champ magnétique (figure c) et n'atteigne pas le sens opposé (figure d).



(c) (d)

L'effet α résulte donc de deux conditions (présentes dans les expressions des coefficients α, équ. 4.66-67).

(i) le champ de vitesse tord les lignes de champ dans le même sens (effet d'hélicité)

(ii) les cyclones ont une durée de vie moyenne inférieure à leur temps de rotation (effet de turbulence).

Il est donc naturel de proposer un mot nouveau pour rendre compte de l'effet α. Le coefficient α peut être appelé le coefficient de torsalité de la turbulence (torsade = objet quelconque contourné en hélice; torseur = ensemble force + couple; la torsion d'une courbe caractérise son écart au plan oscillateur, etc... etc...). Nous avons mis en évidence un effet de torsalité cinétique et magnétique, dans une turbulence homogène, isotrope et torsale. Dans une turbulence atorsale, l'hélicité magnétique est nulle et il y a une cascade directe d'énergie cinétique et magnétique, etc... etc...

APPENDICE A4

Ann. Geophys., t. 29 fasc. 4, 1973, p. 539 - 546

Catastrophe énergétique et nature de la turbulence

A. BRISSAUD[a], U. FRISCH[b], J. LEORAT[c], M. LESIEUR[b], A. MAZURE[c], A. POUQUET[b], R. SADOURNY[d], P. L. SULEM [b].

Centre National de la Recherche Scientifique
Observatoire de Nice, 06-Nice, France

"Tout se perd par la turbulence"
G. Pompidou 8 Décembre 1972

RESUME. – *On présente une conjecture sur la nature de la turbulence complètement développée, homogène et isotrope. La turbulence n'est pas le développement d'instabilités résultant d'un accroissement du nombre de Reynolds d'un écoulement visqueux, mais l'apparition au bout d'un temps fini t_* d'une "catastrophe énergétique" dans un écoulement non visqueux. Avant t_* la covariance spatiale des vitesses est analytique, le spectre a des moments finis à tous les ordres et l'énergie est conservée. Après t_* la covariance cesse d'être analytique, le spectre des vitesses aux grands nombres d'onde suit la loi de Kolmogorov et il y a un taux fini de dissipation d'énergie à viscosité nulle.*

A l'appui de cette hypothèse on présente un calcul exact sur un modèle, puis une théorie phénoménologique simple.

Ces conclusions rejoignent la remarque faite par Onsager (1949) sur la non-conservation de l'énergie par les équations de Navier-Stokes inviscides.

ABSTRACT. – *A conjecture is presented concerning the nature of incompressible, homogeneous, fully developed turbulence. Turbulence is not the onset of instabilities resulting from an increase of the Reynolds number in viscous flows but the appearance after a finite time t_* of an "energetic catastrophy" in inviscid flows. Before t_* the spatial velocity covariance is analytic, the velocity spectrum has moments of all orders and energy is conserved. After t_* the covariance is not analytic anymore, the velocity spectrum at large wavenumbers follows the Kolmogorov law and energy is dissipated at a finite rate with zero viscosity.*

This conjecture is supported by exact calculations on a model and by a simple phenomenological theory.

These conclusions agree with the remark made by Onsager (1949) on the non conservation of energy by the inviscid Navier-Stokes equations.

(a) ENSAE, BP 4032, 31055-Toulouse Cedex, France.
(b) Observatoire de Nice, 06300-Nice, France.
(c) DAF, Observatoire de Meudon, 92-Meudon, France.
(d) LMD, ENS 24 rue Lhomond 75-Paris 5e, France.

1. Introduction

L'étude de la turbulence homogène pleinement développée dans un fluide incompressible est indissociable de l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes quand la viscosité tend vers zéro. Si $\vec{u}(\vec{x}, t)$ est le champ de vitesse, $p(\vec{x}, t)$ la pression, ρ la densité et ν la viscosité cinématique, ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i . \quad (1)$$

On sait que, pour $\nu \neq 0$, le terme non linéaire de ces équations $-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$ conserve l'énergie, en sorte que la dissipation est uniquement due au terme de viscosité. Si ϵ désigne le taux de dissipation d'énergie moyenne

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\langle \vec{u}^2 \rangle \quad (2)$$

on montre facilement que

$$\epsilon = 4\nu D(t) \quad (3)$$

où $D(t) = \frac{1}{2}\langle (\vec{\mathrm{rot}}\, u)^2 \rangle$ est *l'enstrophie*. On se propose dans ce travail dont on expose ici une première version condensée d'étudier certaines propriétés des équations de Navier-Stokes, et en particulier le comportement de la dissipation quand la viscosité tend vers zero. Onsager (1949) conjecture qu'il est possible de donner un sens aux équations de Navier-Stokes inviscides ($\nu = 0$) dans l'espace de Fourier et que celles-ci ne conservent pas nécessairement l'énergie, autrement dit que le taux de dissipation ϵ est différent de zéro. De cette conjecture, il résulte comme l'a remarqué par exemple Orszag (1973), que si l'on passe à la limite de viscosité nulle sur l'équation (3), on peut avoir un taux de dissipation ϵ non nul et donc une enstrophie $D(t)$ infinie. Pour l'instant, il n'existe aucune démonstration directe d'une telle "catastrophe énergétique" fondée sur les équations de Navier-Stokes.

Partant de la conviction que la nature du mécanisme de la turbulence doit pouvoir être reliée aux propriétés structurelles des équations de Navier-Stokes (parmi lesquelles on peut citer tout particulièrement : l'invariance dans certains groupes de transformations, la réversibilité des équations inviscides, le caractère non local des interactions dues à la pression, et la conservation de l'énergie dans les écoulements inviscides différentiables), nous avons construit un modèle mathématique, le MRCM (Markovian Random Coupling Model), version simplifiée du Random Coupling Model de Kraichnan (1961), qui possède les mêmes principales propriétés structurelles que les équations de Navier-Stokes et dont les équations peuvent être étudiées soit analytiquement soit numériquement. Ce modèle est exposé en détail dans un autre article (Frisch, Lesieur, Brissaud, André, 1973). Si l'on écrit les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible sous la forme symbolique

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = L(u, u) + \nu \Delta u \quad (4)$$

où $u(t)$ représente le vecteur vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$ et $L(u, u)$ les termes quadratiques de convection et de pression, les équations modèles MRCM s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(t) = \frac{1}{N}\sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \phi_{\alpha\beta\gamma}(t)\, L(u_\beta, u_\gamma) + \nu \Delta u_\alpha \; ; \alpha = 1, \ldots, N \quad (5)$$

où les $u_\alpha(t)$ constituent un ensemble de N réalisations du champ de vitesse $u(t)$, et les $\phi_{\alpha\beta\gamma}(t)$ sont des fonctions aléatoires gaussiennes centrées et de covariance

$$\langle \phi(t)\, \phi(t') \rangle = \tau_0\, \delta(t - t') \; ; \quad (6)$$

les $\phi_{\alpha\beta\gamma}$ sont toutes indépendantes à la restriction près qu'elles sont presque sûrement complètement symétriques dans les indices $\alpha\beta\gamma$. τ_0, qui a la dimension d'un temps, est un paramètre caractéristique du modèle. Ce modèle revient à coupler N réalisations $u_\alpha(t)$ d'un écoulement $u(t)$ par des phases gaussiennes $\phi_{\alpha\beta\gamma}(t)$. Dans la limite $N \to \infty$, le MRCM conduit à une équation maîtresse exacte pour la covariance spatiale des vitesses à un même instant

$$\langle u_i(\vec{y}, t)\, u_j(\vec{y} + \vec{x}, t) \rangle .$$

L'intérêt du modèle MRCM est de fournir des équations maîtresses considérablement plus faciles à manier numériquement que les équations de Navier-Stokes ; le MRCM permet donc d'avoir accès à des nombres de Reynolds très élevés (de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers). Rappelons que les simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes ne permettent pas à l'heure actuelle de dépasser des nombres de Reynolds de l'ordre de 100 (Orszag-Patterson 1972). Le MRCM permet même dans certains cas des études analytiques comme on le verra ci-dessous. C'est donc un bon outil d'étude qualitative de la turbulence, que nous allons appliquer successivement à l'étude de l'équation de Burgers, puis des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles.

2. Application du MRCM à l'équation de Burgers.

L'équation de Burgers

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = - u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (7)$$

qui peut être considérée comme une version unidimensionnelle sans terme de pression des équations de Navier-Stokes, a souvent été utilisée comme modèle de turbulence. Remarquons que dans cette équation, il n'y a pas de condition d'incompressibilité car celle-ci conduirait à la solution triviale $u = C^{te}$.

Appliqué à l'équation de Burgers, le MRCM conduit à l'équation (Frisch et al. 1973) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\tau_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{U(x, t) - U(o, t)\}^2 + 2\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (8)$$

où

$$U(x, t) = \langle u(y, t)\, u(y + x, t) \rangle \qquad (9)$$

est la covariance spatiale des vitesses à l'instant t. S'il y a des forces extérieures pour injecter de l'énergie, il est nécessaire de rajouter alors un terme $\tau_0 F(x)$ au second membre de l'équation (8), où $F(x)$ est la covariance spatiale des forces extérieures. Nous avons étudié analytiquement et numériquement l'équation aux dérivées particlles non linéaire (8) avec la condition initiale $U(x, o)$ donnée. Les principaux résultats sont les suivants :

a) Cas inviscide ($\nu = o$)

– En l'absence de forces extérieures, l'équation maîtresse (8) possède pour t suffisamment petit une solution analytique de la forme

$$U(x, t) = E(t) - D(t)x^2 + O(x^4) \qquad (10)$$

où $E(t) = \langle u^2(t) \rangle$ est l'énergie moyenne par unité de longueur et $D(t) = 1/2 \langle (\partial u/\partial x)^2 \rangle$ peut être assimilé à l'enstrophie, puisqu'on a pour l'équation de Burgers une dissipation d'énergie donnée par

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \langle u^2 \rangle = 2\nu \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\rangle. \qquad (11)$$

On obtient le développement (10) en calculant chacun de ses coefficients par identification dans l'équation (8). On trouve alors que, tant que le développement (10) est valable, l'énergie reste constante et l'enstrophie vérifie

$$dD/dt = 6\tau_0 D^2 \qquad (12)$$

d'où l'on tire

$$D(t) = \frac{D(o)}{1 - 6\tau_0 D(o) t} \qquad (13)$$

L'enstrophie devient donc infinie à l'instant :

$$t_* = \{6\tau_0 D(o)\}^{-1} \qquad (14)$$

– A l'instant t_* il se produit une *catastrophe énergétique* : la covariance cesse d'être analytique puisque $\partial^2 U(x, t)/\partial x^2$ est infinie au point $x = 0$.

– pour $t > t_*$, la fonction $U(x, t)$, qui est paire, possède un développement de la forme

$$U(x, t) = E(t) - U_1(t) |x| + O(x^2) \; ; \; t > t_* \; ; \qquad (15)$$

Pour affirmer l'existence d'un tel développement, on ne dispose que d'une étude numérique (cf. figure 1), mais les résultats théoriques obtenus dans le cas stationnaire (cf. paragraphe ci-dessous) confirment ce résultat. Signalons que l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (8) inviscide dans un espace de Sobolev a été démontrée par Brauner, Penel, Temam (1973) ; il en résulte que les développements (10) pour $t < t_*$ et (15) pour $t > t_*$ constituent la seule solution possible : on est en particulier sûr que la covariance ne peut redevenir analytique pour $t > t_*$. On peut enfin remarquer que la tranformée de Fourier de $U(x, t)$ pour $t > t_*$ a un comportement asymptotique en k^{-2} pour $k \to \infty$. Si l'on reporte le développement (15) dans l'équation (8), on obtient à l'ordre zéro

$$\frac{dE}{dt} = -\tau_0 U_1^2 , \qquad (16)$$

ce qui montre que pour $t > t_*$, l'énergie $E(t) = U(o, t)$ n'est plus conservée. Remarquons qu'un résultat analogue sur une équation légèrement différente de l'équation (8), a été obtenu par Kraichnan (1968) dans l'étude de l'approximation LHDI (Lagrangian History Direct Approximation ; Kraichnan 1966) appliquée à l'équation de Burgers. Lorsque $t \to \infty$ est en présence de forces extérieures, $U(x, t)$ tend vers une solution *stationnaire* non analytique de la forme (15), (Frisch et al. 1973) ; il y a pourtant injection d'énergie dans le système et absence de dissipation visqueuse, ce qui est un autre aspect de la catastrophe énergétique.

b) Cas visqueux ($\nu \neq o$).

La solution $U(x, t)$ reste analytique quel que soit t : cette solution tend vers la solution décrite au a) lorsque $\nu \to o$.

Pour $t < t_*$

$$\lim_{\nu \to o} \nu \left\langle \left(\frac{\partial u(y, t)}{\partial y}\right)^2 \right\rangle = 0 \qquad (17)$$

de sorte que la dissipation d'énergie par unité de temps tend vers zéro. Par contre, pour $t > t_*$

$$\lim_{\nu \to 0} \nu < \left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}\right)^2 > > 0 \qquad (18)$$

ce qui permet d'interpréter physiquement la catastrophe énergétique comme une dissipation finie d'énergie par une viscosité infinitésimale.

Tous ces résultats ont été obtenus à la fois analytiquement et numériquement sauf en ce qui concerne les temps finis supérieurs à t_* pour lesquels on ne dispose que d'une étude numérique. Le résultat des études numériques est illustré par les figures 1, 2, 3, 4. Les calculs numériques ont été faits avec $\tau_0 = 2$.

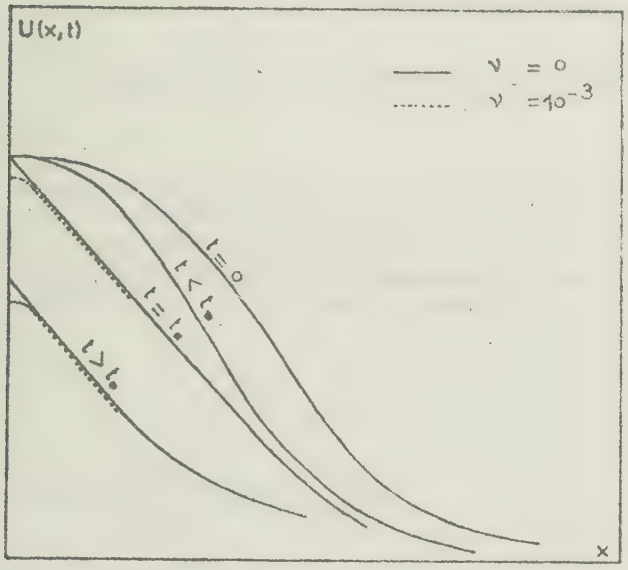


Fig. 1

Evolution de la covariance $U(x, t)$ en l'absence de forces extérieures : l'effet de la viscosité est de faire disparaître la discontinuité de $\partial U(x, t)/\partial x$ au point $x = 0$.

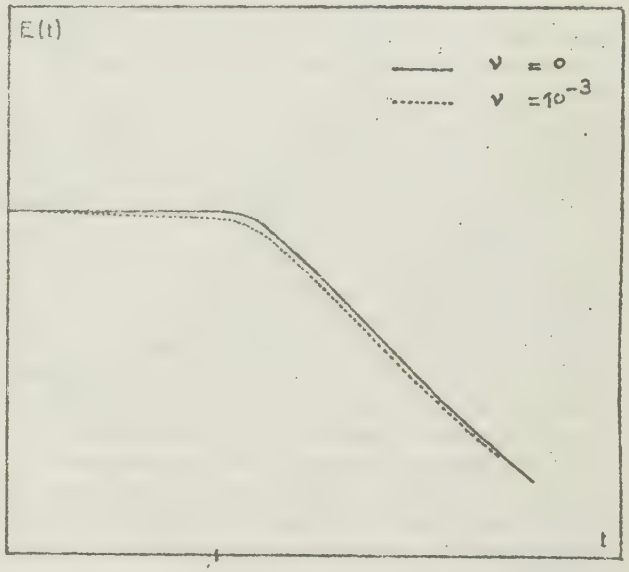


Fig. 2

Evolution de l'énergie $E(t) = U(0, t)$ en l'absence de forces extérieures.

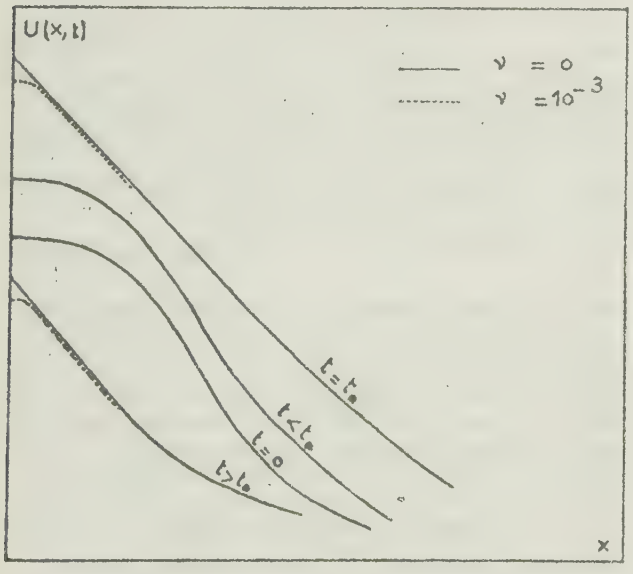


Fig. 3

Evolution de la covariance $U(x, t)$ en présence de forces extérieures ; on remarque que même sans viscosité, on atteint un état stationnaire pour $t = \infty$.

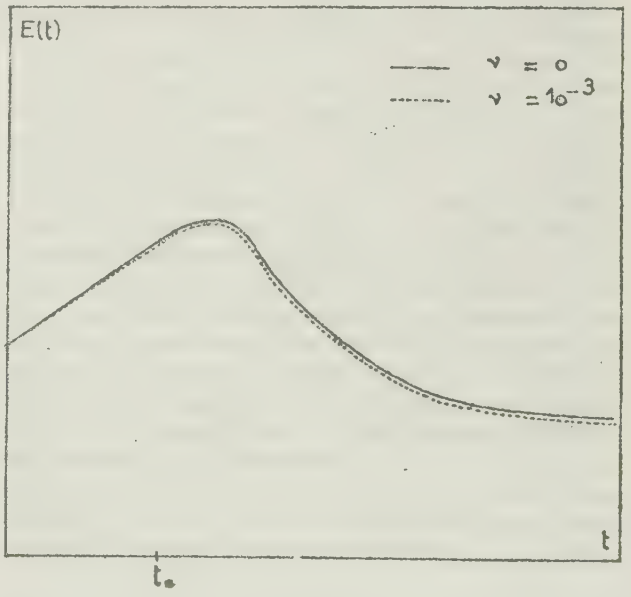


Fig. 4

Evolution de l'énergie $E(t) = U(0, t)$ en présence de forces extérieures : avant la catastrophe, l'énergie croît linéairement au taux auquel elle est injectée ; après la catastrophe, elle atteint un maximum et puis décroît vers sa valeur d'équilibre.

et $\nu = 10^{-3}$ et $\nu = 0$; la covariance spatiale initiale est $U(x, 0) = \exp(-x^2)$; la covariance spatiale des forces extérieures est $F(x) = \exp(-x^2)$.

3. Turbulence tridimensionnelle.

Nous avons ensuite étudié le modèle MRCM des équations de Navier-Stokes à trois dimensions. L'équation maîtresse du MRCM est trop complexe pour être reproduite ici (Frisch et al. 1973). Dans l'hypothèse d'une turbulence homogène et isotrope, on déduit de cette équation maîtresse, une équation différentielle pour l'enstrophie analogue à l'équation (12)[1]. En l'absence de forces extérieures, l'énergie est encore conservée jusqu'à un temps critique $t_* = 3(\tau_0 D(0))^{-1}$, instant auquel l'enstrophie devient infinie. Pour $t > t_*$, l'énergie n'est plus conservée et le spectre d'énergie $E(k, t)$ a un comportement asymptotique en k^{-2} pour $k \to \infty$. Le fait que l'on ne trouve pas la loi de Kolmogorov en $k^{-5/3}$ (1941) vient de ce que le MRCM introduit artificiellement un temps caractéristique d'interaction dynamique entre les tourbillons τ_0, indépendant de leur taille. Néanmoins, les phénomènes de cascade locale à travers cette zone inertielle en k^{-2} sont, pour le MRCM, analogues aux prédictions de Kolmogorov concernant la cascade d'énergie en $k^{-5/3}$ pour la turbulence réelle.

A la suite de ces divers résultats, on est tenté de s'intéresser directement à l'évolution temporelle d'un écoulement aléatoire (sans modèle). En l'absence d'une théorie analytique rigoureuse de l'équation de Navier-Stokes aléatoire on peut avoir recours à la théorie phénoménologique de Obukhov qui est exposée par exemple dans la référence Panchev (1971) et dont on rappelle ici les grandes lignes. L'idée est de faire le bilan énergétique de tous les tourbillons dont le nombre d'ondes est compris entre 0 et k. Les gains d'énergie sont dus à un apport de densité spectrale $F(k)$ par les forces extérieures aléatoires. Les pertes sont dues d'une part à la viscosité et d'autre part au transfert d'énergie vers les tourbillons plus petits par interaction non linéaire, transfert que l'on peut supposer local. De ce transfert résulte un taux de variation de l'énergie des tourbillons de nombre d'onde k qui peut s'écrire, à un facteur près de l'ordre de l'unité, comme le rapport de l'énergie totale disponible dans ces tourbillons et d'un temps caractéristique $t(k)$ de distorsion de ces tourbillons par l'action de cisaillement des autres tourbillons. Cette distorsion étant due surtout à la convection en présence de cisaillement, on peut estimer $t(k)$ pour une structure d'échelle $d = k^{-1}$ de la façon suivante. La distance de deux points M_1 et M_2 séparés initialement de d a varié au bout d'un temps t de $t(u_2 - u_1)$ où u_1 et u_2 sont les vitesses au point M_1 et M_2. On aura une distorsion appréciable dès que $t(u_2 - u_1)$ est de l'ordre de d. Comme $(u_2 - u_1)/d$ est une mesure du cisaillement du champ des vitesses, on est amené à prendre pour $t(k)$ l'inverse de la vorticité quadratique moyenne

$$t(k) = \{ <(\mathrm{rot}\, u)^2> \}^{-1/2} = \left\{ \int_0^\infty p^2 E(p) dp \right\}^{-1/2} \tag{19}$$

où $E(p)$ est la densité spectrale d'énergie. En fait, les mouvements de nombre d'onde supérieur à k, à cause de leur caractère désordonné, ne contribuent pas au temps de distorsion et il faut seulement intégrer de 0 à k. Finalement l'équation d'Obukhov du bilan énergétique s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(p) dp = -\frac{A}{t(k)} \int_k^\infty E(p) dp - 2\nu \int_0^k p^2 E(p) dp + \int_0^k F(p) dp$$

$$\frac{1}{t(k)} = \left\{ \int_0^k p^2 E(p) dp \right\}^{1/2} \tag{20}$$

A est une constante numérique de l'ordre de l'unité.

L'équation d'Obukhov n'a pas à notre connaissance été utilisée jusqu'ici pour étudier l'évolution temporelle d'un écoulement aléatoire en partant d'un spectre initial "non turbulent" c'est-à-dire possédant des moments finis à tous les ordres. L'examen de ce problème conduit aux conclusions suivantes. Dans le cas inviscide sans forces extérieures il y a conservation de l'énergie totale $E = \int_0^\infty E(p) dp$ tant que l'enstrophie $D(t) = \int_0^\infty p^2 E(p) dp$ reste finie. Grâce à une inéquation différentielle pour l'enstrophie, on montre que celle-ci devient infinie au bout d'un temps t_* approximativement égal à $D(0)^{-1/2}$: en effet, en dérivant l'équation (20) inviscide par rapport à k, multipliant par k^2 et intégrant sur k de zéro à l'infini, on obtient pour l'enstrophie

$$D(t) = \int_0^\infty k^2 E(k) dk,$$

(1) Le fait que l'enstrophie peut être calculée analytiquement avait déjà été remarqué par Proudman et Reid (1954) en étudiant l'approximation quasi-normale vis à vis de laquelle l'équation maîtresse du MRCM apparaît comme une forme markovianisée (mais qui ne conduit pas à des spectres d'énergie négatifs).

l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{d}{dt} D(t) = A \int_0^\infty k^2 E(k) \left\{ \int_0^k p^2 E(p)\, dp \right\}^{-1/2}$$

$$\left[\int_0^k p^2 E(p) dp - \frac{1}{2} k^2 \int_k^\infty E(p) dp \right] dk. \qquad (21)$$

En minorant

$$\left\{ \int_0^k p^2 E(p)\, dp \right\}^{-1/2} \quad \text{par} \quad \left\{ \int_0^\infty p^2 E(p) dp \right\}^{-1/2}$$

et en majorant

$$k^2 \int_k^\infty E(p)\, dp \quad \text{par} \quad \int_k^\infty p^2 E(p)\, dp$$

on obtient pour $D(t)$, l'inéquation différentielle

$$\frac{d}{dt} D(t) > A\, D^{-1/2} \left\{ \int_0^\infty k^2 E(k) \int_0^k p^2 E(p)\, dpdk \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 E(k) \int_k^\infty p^2 E(p)\, dpdk \right\} \qquad (22)$$

qui s'écrit encore, en remarquant que chacune des intégrales doubles figurant dans le second membre de (22) est égale à $\frac{1}{2} D^2$,

$$\frac{d}{dt} D(t) > \frac{A}{4} D^{3/2} . \qquad (23)$$

Ceci montre que l'enstrophie $D(t)$ devient infinie au bout d'un temps t_* inférieur à $\frac{8}{A} D(0)^{-1/2}$.

Après cette catastrophe, l'énergie décroit. En reprenant le problème avec de la viscosité on aboutit aux mêmes conclusions que dans le cas du modèle MRCM. Enfin, comme l'a montré Obukhov, si $F \neq 0$ il y a une solution stationnaire qui pour $\nu = 0$ est donnée asymptotiquement par la loi de Kolmogorov-Obukhov

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \; ; \quad \epsilon = \int_0^\infty F(p) dp \qquad (24)$$

4. Conclusion

L'ensemble des résultats obtenus permet d'avancer une hypothèse sur la nature de la turbulence, hypothèse dont on peut donner deux formulations

1/ Formulation brutale. La turbulence pleinement développée n'existe que pour des écoulements inviscides ; si l'on part d'un écoulement aléatoire inviscide ayant une covariance spatiale analytique cette covariance reste tout d'abord analytique et l'énergie se conserve (elle augmente s'il y a des forces extérieures) ; cependant, par un effet de cascade vers les grands nombres d'onde, l'enstrophie croit et devient infinie au bout du temps $t_* \approx D(0)^{-1/2}$; après cette catastrophe énergétique, la covariance cesse d'être analytique, il apparait un spectre en $k^{-5/3}$ et l'énergie cesse d'être conservée. On rejoint ici la remarque faite en 1949 par Onsager que les équations de Navier-Stokes inviscides à trois dimensions ne conservent pas nécessairement l'énergie et qu'il pourrait exister un mécanisme de "dissipation turbulente" ne faisant pas intervenir la viscosité.

2/ Formulation plus nuancée. Il n'est pas sûr qu'il soit possible de donner un sens aux solutions de Navier-Stokes inviscide pendant un temps infini. Dans ce cas, il faut considérer le problème visqueux dans la limite $\nu \to 0$. L'hypothèse précédente concerne alors la limite des quantités correspondantes pour $\nu \to 0$. De plus, on est amené à faire l'hypothèse que le taux de dissipation tend vers zéro pour $t < t_*$ et vers une limite fini pour $t > t_*$. C'est cette dissipation finie par une viscosité infinitésimale qui permet de résoudre le paradoxe énergétique.

L'aspect sans doute le plus nouveau de cette hypothèse est la possibilité, dans la limite inviscide, pour un écoulement *aléatoire* (mais analytique) de devenir *turbulent* à condition d'attendre assez longtemps. Ceci écarte beaucoup des conceptions traditionnelles selon lesquelles un écoulement devient turbulent lorsque le nombre de Reynolds devient suffisamment grand. Par contre les idées de Richardson et de Kolmogorov sur les cascades d'énergie nous paraissent pleinement justifiées.

Il peut paraître peu réaliste de s'intéresser à la limite $\nu \to 0$ alors que dans les écoulements réels la viscosité est toujours non nulle. A ceci on peut répondre qu'il existe des situations analogues dans d'autres branches de la physique ; par exemple Yang et Lee (1952) ont montré qu'en mécanique statistique classique les changements de phase n'existent que dans la limite des systèmes infinis. Dans un système fini les effets physiques observés sont cependant très proches de ceux que décrit la théorie asymptotique pourvu que le nombre de particules soit assez élevé. De même l'introduction d'une viscosité finie mais faible apparait comme une *petite* perturbation de la turbulence inviscide décrite ci-dessus. Le problème faiblement visqueux peut alors être traité, par exemple, en introduisant une "couche limite" dissipative aux échelles suffisamment petites.

La vérification de cette hypothèse sur la turbulence peut se concevoir d'au moins trois façons. Premièrement, poursuivant l'étude mathématique des équations de Navier-Stokes à trois dimensions, il faudrait mettre en évidence l'existence et l'unicité de solutions aléatoires pour des temps arbitrairement longs et des viscosités arbitrairement faibles et mon-

/r l'existence de limites (en un sens sans doute très faible) pour $\nu \to 0$; puis, il faudrait étudier l'analyticité de la covariance limite. On pourrait aussi, ce qui semble plus aventureux, essayer de donner un sens à l'équation de Navier-Stokes inviscide dans un espace convenable. Dans un premier temps, il paraît souhaitable de faire une étude plus poussée de l'équation maîtresse (8), en particulier au voisinage de l'instant $t = t_*$. Deuxièmement, on peut entreprendre une étude numérique fine sur un écoulement aléatoire, de covariance initiale analytique. L'intégration numérique doit être faite avec une viscosité non nulle et l'on doit étudier la dissipation pour des viscosités de plus en plus faibles. Si l'enstrophie initiale est suffisamment grande, la catastrophe doit se manifester au bout d'un temps relativement court, suivie par l'apparition d'une zone inertielle en $k^{-5/3}$ dans le spectre d'énergie. Troisièmement, on peut envisager une étude expérimentale (superfluides ?).

Nous tenons à remercier K. Elsässer et R. Kraichnan dont les remarques critiques nous ont été d'un très grand secours

Manuscrit reçu le 5 avril 1973
et sous sa forme définitive
août 1973

BIBLIOGRAPHIE

Brauner C.M., Penel P. et Temam R. ; communication privée, 1973.

Frisch U., Lesieur M., Brissaud A. et André J.C. "Qualitative problems in fully developed turbulence : a soluble model", Observatoire de Nice 1973, prépublication.

Kolmogorov A.N., "Structure locale de la turbulence dans un liquide incompressible pour des nombres de Reynolds arbitrairement élevés", *Dokl. Akad. Nauk URSS* 30, 299,303, 1941.

Kraichnan R.H., "Dynamics of non-linear stochastic systems", *J. Math. Physics* 2, 124-148, 1961.

Kraichnan R.H., *Phys. Fluids* 9, 1728, 1966.

Kraichnan R.H. "Lagrangian-History Statistical Theory for Burgers'Equation" *Phys. Fluids* 11, 265 (1968).

Onsager L. "Statistical hydrodynamics", *Suppl. Nuovo Cimento* 6 série 9, 279-287, 1949.

Orszag S.A. et Patterson G.S., "Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence". *Phys. rev. letters.* 28, 76, 1972

Orszag S.A., "The statistical theory of turbulence", Cambridge University Press, à paraître, 1973.

Panchev S., Random functions and turbulence", 198-203, Pergamon, 1971.

Proudman I. et Reid W.H., *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A247, 163 (1954).

Yang C.N. et Lee T.D., "Statistical theory of equation of state and phase transitions", *Phys. Rev.* 87, 404, 409, (1952).

APPENDICE A_4 (Suite)

COMPLEMENT SUR LES CATASTROPHES

L'article "Catastrophe énergétique et nature de la Turbulence" présente une conjecture sur la nature de la turbulence qui n'a pu être vérifiée que sur un modèle probabiliste. Peut-on trouver une équation modèle des équations de Navier Stokes ou d'Euler ($\nu = o$) et présentant aussi des catastrophes ?

1) Le modèle le plus simple est l'équation de Burgers sans viscosité (Burgers J.M., 1950 , Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 53,247)

$$\frac{D}{Dt} u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \qquad (1)$$

avec la condition initiale

$$u_o(x) = u(x, 0), \text{ supposé différentiable.} \qquad (2)$$

En posant

$$m(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t),$$

il vient

$$\frac{D}{Dt} m = - m^2 \qquad (3)$$

Cette équation s'intègre immédiatement en coordonnées lagrangiennes. Soit $m(t;x_o)$ la valeur de m à l'instant t au point qui, à $t = 0$, était en x_o; il vient :

$$m(t;x_o) = \frac{1}{t + \frac{1}{m(0,x_o)}}$$

On voit que la dérivée de u devient infinie pour la première fois à l'instant

$$t^* = -\left[\inf \frac{\partial}{\partial x} u_o(x)\right]^{-1} , \qquad (4)$$

Ce résultat se généralise facilement à l'équation vectorielle

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}.\nabla\right)\vec{u} = 0 . \qquad (5)$$

En introduisant en effet la matrice gradient d'éléments

$$M_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j , \qquad (6)$$

l'équation (5) donne

$$\frac{DM}{Dt} = -M^2 . \qquad (7)$$

Si M est symétrique, c'est-à-dire si le champ de vitesse initial est irrotationnel, on peut diagonaliser (7) et l'on est ramené au problème précédent.

Les équations d'Euler d'un fluide parfait incompressible s'écrivent

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p , \qquad (8)$$

$$\nabla.\vec{u} = 0$$

Elles diffèrent de (5) par la présence du terme de pression qui sert précisément à maintenir l'incompressibilité. Pour un fluide illimité, la pression peut s'éliminer en prenant la divergence de (8); en résolvant une équation de Poisson (à trois dimensions), on obtient :

$$p = \frac{1}{4\pi r} * \left(\frac{\partial}{\partial} j\right)\left(\frac{\partial}{\partial} _\right) \quad ,$$

où * dénote la convolution spatiale. En introduisant encore la matrice gradient définie par (5), on a

$$p = \frac{1}{4\pi r} * \mathrm{tr}\left(M^2\right) \quad ,$$

où tr dénote la trace (somme des éléments diagonaux). En substituant dans (8) et en prenant le gradient, il vient

$$\frac{DM}{Dt} = - M^2 + \mathrm{tr}\left(M^2\right) * \left(\nabla\nabla \frac{-1}{4\pi r}\right) \quad . \tag{9}$$

En séparant M en sa partie symétrique S et sa partie antisymétrique A, l'équation (9) s'écrit encore (comme pour un système couplé)

$$\frac{DS}{Dt} = - S^2 - A^2 + \mathrm{tr}\ (S^2 + A^2) * \left(\nabla\nabla - \frac{1}{4\pi r}\right) \tag{10}$$

$$\frac{DA}{Dt} = - SA - AS \tag{10'}$$

On remarque que (10') n'est autre que l'équation du tourbillon

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} \qquad \left(\text{car } Aij = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\omega_l\right)$$

Contrairement à (7), l'équation (9) ou le système (10 - 10') ne sont plus locaux, même en coordonnées lagrangiennes et ne peuvent donc pas s'intégrer simplement. Pour se ramener à un système local, on modifie le terme de pression dans (10).

L'idée est la suivante : l'incompressibilité se traduit par tr S = o; cette condition est "propagée" par l'équation (10) puisque

$$\frac{D}{Dt}\ \mathrm{tr}\ S = - \mathrm{tr}\ (S^2 + A^2) + \mathrm{tr}\ (S^2 + A^2) * \mathrm{tr}\left(\nabla\nabla - \frac{1}{4\pi r}\right) = 0 \tag{11}$$

et $\nabla^2(-\frac{1}{4\pi r}) = \delta(r)$. La condition d'incompressibilité est encore vérifiée si l'on remplace $\nabla\nabla - \frac{1}{4\pi r}$ par $\frac{1}{3}$ tr $\nabla\nabla - \frac{1}{4\pi r} = \frac{\delta(r)}{3}$ (plus généralement, en dimension d'espace D, il faudrait prendre $\frac{\delta(r)}{D}$).

On aboutit ainsi au système modifié

$$\frac{DS}{Dt} = - (S^2 + A^2) + \frac{I}{D} \text{ tr } (S^2 + A^2) \qquad (12)$$

$$\frac{DA}{Dt} = - AS + SA \qquad (12')$$

Remarque :

Le champ matriciel M = S + A solution de (12 - 12') n'est plus en général un champ de gradient de la forme (6), même s'il est initialement; on ne peut donc plus définir un champ de vitesse.

Etudions maintenant le problème de l'apparition de singularités sur (12 - 12'). Commençons par le cas bidimensionnel (D = 2). La forme la plus générale des matrices S et A est alors :

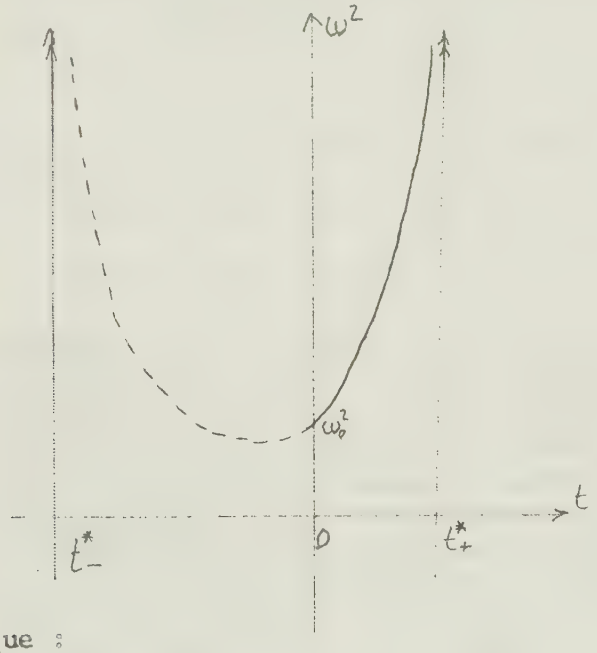
$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} .$$

En substituant dans (12 - 12'), il vient :

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{D\beta}{Dt} = 0 .$$

L'absence de catastrophe à deux dimensions rejoint les conclusions de Pouquet et al (1974).

Passons enfin au cas tridimensionnel (D = 3). Le système (12 - 12') ne s'intègre plus analytiquement (au moins pas de façon évidente). (Dans le cas particulier où la vorticité initiale est nulle, elle le reste; on se donne alors S (O) sous forme diagonale (12) s'intègre et l'existence d'une catastrophe dépend des conditions initiales). Dans le cas de vorticité initiale non nulle, les équations (12 - 12') ont été intégrées numériquement. Un résultat typique est représenté sur la figure ci-dessous (où ω^2 est donné en fonction du temps. On voit que le tourbillon devient infini au bout d'un temps fini (numériquement cela se traduit par un overflow).



Remarque :

Les équations (12 - 12') sont réversibles dans le temps, ce qui n'était pas le cas de l'équation pour l'enstrophie du modèle MRCM dans l'article "Catastrophe énergétique et nature de la turbulence" (équation 12 de cet article). Numériquement, cela se vérifie bien en intégrant (12 - 12') vers les t négatifs avec les mêmes conditions initiales que précédemment. Le résultat est figuré ci-dessus en pointillé (apparition d'une catastrophe à t^*_-).

APPENDICE A5

J. Fluid Mech. (1975), *vol.* 68, *part* 4, *pp.* 769-778
Printed in Great Britain

Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence

By U. FRISCH, A. POUQUET,

Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Nice, France

J. LÉORAT AND A. MAZURE

Université Paris VII, Observatoire de Meudon, France

(Received 2 November 1973 and in revised form 10 October 1974)

Some of the consequences of the conservation of magnetic helicity

$$\int \mathbf{a}.\mathbf{b}\,d^3\mathbf{r} \quad (\mathbf{a} = \text{vector potential of magnetic field } \mathbf{b})$$

for incompressible three-dimensional turbulent MHD flows are investigated. Absolute equilibrium spectra for inviscid infinitely conducting flows truncated at lower and upper wavenumbers $k_{\min}$ and $k_{\max}$ are obtained. When the total magnetic helicity approaches an upper limit given by the total energy (kinetic plus magnetic) divided by $k_{\min}$, the spectra of magnetic energy and helicity are strongly peaked near $k_{\min}$; in addition, when the cross-correlations between the velocity and magnetic fields are small, the magnetic energy density near $k_{\min}$ greatly exceeds the kinetic energy density. Several arguments are presented in favour of the existence of inverse cascades of magnetic helicity towards small wavenumbers leading to the generation of large-scale magnetic energy.

1. Introduction

It is known that turbulent flows which are not statistically invariant under plane reflexions may be important for the generation of magnetic fields; for example, Steenbeck, Krause & Rädler (1966) have shown within the framework of the kinematic dynamo problem (prescribed velocity fields) that in helical flows, i.e. flows in which the velocity and vorticity are statistically correlated, a mean magnetic field may be amplified by the so-called α-effect. It has been recognized for quite some time (e.g. Batchelor 1950; Moffatt 1970, 1973) that, owing to the back reaction of the Lorentz force on the velocity field, the ultimate fate of the magnetic field and the magnetic energy can only be studied within the framework of the full MHD equations. These equations are

$$(\partial/\partial t - \nu\nabla^2)\,\mathbf{v} = -(\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} + (\mathbf{b}.\nabla)\,\mathbf{b} - \nabla p + \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$(\partial/\partial t - \lambda\nabla^2)\,\mathbf{b} = -(\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}.\nabla)\,\mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\nabla.\mathbf{v} = 0, \quad \nabla.\mathbf{b} = 0, \tag{3}$$

where $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ and $(\mu\rho)^{\frac{1}{2}}\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$ are the velocity and magnetic fields (SI units), ν is the kinematic viscosity, λ the magnetic diffusivity, μ the magnetic susceptibility, ρ the fluid density, ρp the total pressure, and $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ a given solenoidal driving term which maintains statistical stationarity in the dissipative system. The ordinary Navier–Stokes equations resulting from (1)–(3) with $\mathbf{b}=0$ will be called the *non-magnetic* equations.

The present paper is essentially based on the fact that for inviscid, unforced, infinitely conducting, differentiable flows vanishing at infinity, the MHD equations possess three quadratic invariants: one scalar, the total energy

$$E_T = \tfrac{1}{2}\int (v^2+b^2)\,d^3\mathbf{r}, \tag{4}$$

and two pseudo-scalars, the *magnetic helicity* (Elsässer 1956)

$$H_M = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{a}.\mathbf{b}\,d^3\mathbf{r} \tag{5}$$

(where $\mathbf{a}$ = vector potential of magnetic field) and the *cross-helicity* (Woltjer 1958)

$$H_C = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{v}.\mathbf{b}\,d^3\mathbf{r}. \tag{6}$$

An interpretation of the invariants (5) and (6) has been provided by Moffatt (1969). Note that the invariance of H_M follows from (2) and (3) alone (with $\lambda=0$) and therefore puts a constraint even on the kinematic dynamo theories. For statistically homogeneous turbulence, the above integrals are divergent and should be replaced by their mean values per unit volume, denoted by $\langle E_T\rangle$, $\langle H_M\rangle$ and $\langle H_C\rangle$.

If we assume isotropy but not invariance under plane reflexions the simultaneous second-order moments may be written in the Fourier representation (within constant factors)

$$2\langle v_i(\mathbf{k})\,v_j^*(\mathbf{k})\rangle = P_{ij}(\mathbf{k})\,U_K(k) - i\epsilon_{ijf}k_f\tilde{U}_K(k), \tag{7}$$

$$2\langle v_i(\mathbf{k})\,b_j^*(\mathbf{k})\rangle = P_{ij}(\mathbf{k})\,\tilde{U}_C(k) - i\epsilon_{ijf}k_f U_C(k), \tag{8}$$

$$2\langle b_i(\mathbf{k})\,b_j^*(\mathbf{k})\rangle = P_{ij}(\mathbf{k})\,U_M(k) - i\epsilon_{ijf}k_f\tilde{U}_M(k), \tag{9}$$

where
$$k=|\mathbf{k}|, \quad P_{ij}(\mathbf{k})=\delta_{ij}-k_ik_j/k^2 \tag{10}$$

and ϵ_{ijf} is the fundamental antisymmetric tensor. For non-helical turbulence all pseudo-scalars $\tilde{U}(k)$ vanish. The kinetic, magnetic and total energy spectra are given by

$$E_K(k)=2\pi k^2U_K(k), \quad E_M(k)=2\pi k^2U_M(k), \tag{11}$$

$$E_T(k)=E_K(k)+E_M(k), \tag{12}$$

and the kinetic, magnetic and cross-helicity spectra by

$$\left.\begin{aligned} H_K(k)&=2\pi k^4\tilde{U}_K(k), \quad H_M(k)=2\pi k^2\tilde{U}_M(k),\\ H_C(k)&=2\pi k^2\tilde{U}_C(k). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

A consequence of the positive definiteness of the spectral tensors is that the three helicity spectra satisfy realizability conditions:

$$|H_K(k)| \leqslant kE_K(k), \tag{14}$$

$$|H_M(k)| \leqslant E_M(k)/k \leqslant E_T(k)/k, \tag{15}$$

$$|H_C(k)| \leqslant \{E_K(k)\,E_M(k)\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \tfrac{1}{2}E_T(k). \tag{16}$$

When (14) is an equality for some k, we say that the kinetic helicity is *maximal* at that wavenumber (similarly for the magnetic and cross-helicity). When this holds for arbitrary k, we say that there is a state of maximal helicity. As noticed by Kraichnan (1973), maximal kinetic helicity cannot persist under evolution determined by the equations of motion.

Note that $\langle E_T\rangle$, $\langle H_M\rangle$ and $\langle H_C\rangle$ are related to their spectra by

$$\langle E_T\rangle = \int_0^\infty E_T(k)\,dk, \quad \langle H_M\rangle = \int_0^\infty H_M(k)\,dk, \quad \langle H_C\rangle = \int_0^\infty H_C(k)\,dk. \tag{17)-(19}$$

It must be stressed that $H_K(k)$, $H_M(k)$ and $H_C(k)$ are *not* positive definite; therefore, for example, the mean magnetic helicity $\langle H_M\rangle$ may be zero with

$$H_M(k) \not\equiv 0.$$

In the *non-magnetic* case the corresponding invariants are kinetic energy and kinetic helicity (Betchov† 1961; Moffatt 1969). Curiously, in the transition to MHD the energetic invariant becomes the total energy whereas kinetic helicity is no longer invariant; magnetic helicity does not even have the same dimensions as kinetic helicity. The effect of kinetic helicity on non-magnetic turbulent flows has been considered in recent papers (Brissaud *et al.* 1973; Kraichnan 1973; Frisch, Lesieur & Brissaud 1974). The main conclusions of these papers are now briefly summarized for later use.

(i) When kinetic helicity is injected at a constant rate η into a turbulent fully developed isotropic flow with an energy spectrum $E_K(k)$, this kinetic helicity is carried along by the energy cascade, giving rise to a simultaneous helicity cascade of the form

$$H_K(k) \sim (\eta/\epsilon)\,E_K(k), \tag{20}$$

where ϵ is the energy transfer rate. Since $H_K(k)$ is linear in η, this cascade is conveniently called *linear*. This result is supported by phenomenological arguments (Brissaud *et al.* 1973) and numerical calculations on a soluble stochastic model, which indeed show that, in the inertial range, $(\epsilon/\eta)\,H_K(k)/E_K(k)$ is a purely numerical constant (Lesieur 1973). The possibility of an inverse helicity cascade, considered by Brissaud *et al.* (1973), seems now to be ruled out both by the results of numerical experiments and by an argument of Kraichnan (1973). He argued that, owing to the absence of absolute equilibrium states with energy peaked at low wavenumbers (as for two-dimensional turbulence), a simultaneous cascade of energy from intermediate wavenumbers to low wavenumbers and of helicity from intermediate wavenumbers to high wavenumbers is unlikely.

† This reference contains certain minor errors, particularly in equations (2) and (8).

(ii) The presence of kinetic helicity, especially maximal helicity, inhibits energy transfer to large wavenumbers. This was first demonstrated by calculations for two interacting helical waves (Kraichnan 1973) and by numerical resolution of the direct-interaction approximation equation (J. Herring, private communication). It is also supported by direct numerical integration of the Navier–Stokes equations (S. Patterson, private communication) and by a simple argument due to S. Patterson and W. V. R. Malkus: a non-zero helicity $\int \mathbf{v}.\boldsymbol{\omega} d^3\mathbf{r}$ imposes certain phase relations between the velocity $\mathbf{v}$ and the vorticity $\boldsymbol{\omega}$, e.g. $H_K > 0$ means that $\mathbf{v}$ and $\boldsymbol{\omega}$ have a tendency to align; this obviously reduces the nonlinear term $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ in the Navier–Stokes equations, which means that transfer is inhibited.

(iii) Application of Gibbs statistical mechanics to the inviscid non-magnetic equations truncated in Fourier space produces *absolute-equilibrium* solutions with a density in phase space proportional to $\exp\{-\alpha E_K - \beta H_K\}$, where α and β are expressible in terms of the mean kinetic energy and helicity. The corresponding energy spectrum is

$$E_K(k) = 4\pi\alpha k^2/(\alpha^2 - \beta^2 k^2) \quad (k_{\min} < k < k_{\max}), \tag{21}$$

with the positivity conditions α, $\alpha^2 - \beta^2 k^2 > 0$. The presence of helicity ($\beta \neq 0$) may strongly enhance the excitation found at large wavenumbers near $k_{\max}$ (Kraichnan 1973).

2. Absolute-equilibrium helical MHD ensembles

Following Kraichnan (1967, 1973), we consider the absolute statistical equilibrium ($\nu = \lambda = 0$, $\mathbf{f} = 0$) of the truncated MHD equations. They are obtained by considering solutions which, being periodic in space, are represented by Fourier series and then retaining only those Fourier components $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ and $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ of the velocity and magnetic fields for which $|\mathbf{k}| = k \in I = (k_{\min}, k_{\max})$, and dropping any nonlinear interaction terms involving one or several wavenumbers outside this interval I. The energy invariant

$$E_T = \tfrac{1}{2}\sum_k (v_i(k) v_i^*(k) + b_i(k) b_i^*(k)) \tag{22}$$

survives under truncation. Indeed, take the *untruncated* equations and assume that, at some time t, $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{b}(\mathbf{k}) = 0$ for $k \notin I$. This does not imply that their time derivatives $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$ and $\dot{\mathbf{b}}(\mathbf{k})$ are zero for $k \notin I$. However, such terms will not contribute to dE_T/dt at time t since $v_i(\mathbf{k})\dot{v}_i^*(\mathbf{k})$, $\dot{v}_i(\mathbf{k}) v_i^*(\mathbf{k})$, $b_i(\mathbf{k})\dot{b}_i^*(\mathbf{k})$ and $\dot{b}_i(\mathbf{k}) \times b_i^*(\mathbf{k})$ are all zero for $k \notin I$. It follows that, at time t, dE_T/dt has the same value, zero, for the untruncated and truncated equations (R. H. Kraichnan, private communication). The same proof holds for any quadratic invariant which is a sum of contributions from individual Fourier components, e.g. the magnetic and cross-helicity

$$H_M = \tfrac{1}{2}\sum_k i k^{-2} \epsilon_{rmn} b_r(\mathbf{k}) b_m^*(\mathbf{k}) k_n, \tag{23}$$

$$H_C = \tfrac{1}{4}\sum_k (v_i(\mathbf{k}) b_i^*(\mathbf{k}) + v_i^*(\mathbf{k}) b_i(\mathbf{k})). \tag{24}$$

Notice that in (22)–(24) E_T, H_M and H_C are not the mean values of invariants but the stochastic values corresponding to individual realizations.

The truncated equations of motion possess canonical equilibrium ensembles for which the density in phase space is

$$\rho = Z^{-1}\exp(-\alpha E_T - \beta H_M - \gamma H_C), \tag{25}$$

where Z is a normalizing constant. This density is the exponential of a quadratic form and therefore defines a Gaussian ensemble. To calculate the second-order moments of the components of the velocity and magnetic fields the following lemma is used.

LEMMA. The multivariate Gaussian density

$$\rho(x) = Z^{-1}\exp\{-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j\} \tag{26}$$

has second-order moments given by

$$\langle x_i x_j\rangle = A^{-1}_{ij}, \tag{27}$$

where $\mathbf{A}^{-1}$ is the inverse of $\mathbf{A}$.

This result is obvious when $\mathbf{A}$ is diagonal and the general case is reducible to this special case by a linear orthogonal transformation (see also Lumley 1970, p. 38).

To apply this result we must determine, for each wave vector $\mathbf{k}$, the real and imaginary parts of the two components of $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ in a plane perpendicular to $\mathbf{k}$ (since $\mathbf{k}.\mathbf{v}(\mathbf{k}) = 0$) and similarly for $\mathbf{b}(\mathbf{k})$. Clearly the matrix $\mathbf{A}$ separates into 8×8 blocks corresponding to the different wave vectors. Each such block reads

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta/k \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\beta/k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 & -\beta/k & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma & \beta/k & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{28}$$

The inverse of this is given by

$$\mathbf{A}^{-1}(k) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & X & Q & 0 & 0 & Y \\ 0 & P & -X & 0 & 0 & Q & -Y & 0 \\ 0 & -X & P & 0 & 0 & -Y & Q & 0 \\ X & 0 & 0 & P & Y & 0 & 0 & Q \\ Q & 0 & 0 & Y & R & 0 & 0 & W \\ 0 & Q & -Y & 0 & 0 & R & -W & 0 \\ 0 & -Y & Q & 0 & 0 & -W & R & 0 \\ Y & 0 & 0 & Q & W & 0 & 0 & R \end{pmatrix}, \tag{29}$$

where

$$\Delta = (\alpha^2 - \tfrac{1}{4}\gamma^2)^2 - k^{-2}\alpha^2\beta^2,$$

$$W = -\alpha^2\beta/k, \quad X = -\beta\gamma^2/4k, \quad Y = \alpha\beta\gamma/2k,$$

$$P = \frac{\Delta}{\alpha} + \frac{\gamma^2}{4\alpha}\left(\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right), \quad Q = -\tfrac{1}{2}\gamma(\alpha^2 - \tfrac{1}{4}\gamma^2), \quad R = \alpha(\alpha^2 - \tfrac{1}{4}\gamma^2).$$

It can be checked that the second-order moments given by (27) have the general form given by (7)–(9) since we are dealing with an isotropic homogeneous situation. Finally, the various energy and helicity spectra are

$$E_K(k) = \frac{4\pi}{\alpha}\left(1+\frac{tg^2\phi}{D(k)}\right)k^2, \quad H_K(k) = -\frac{4\pi k_c tg^2\phi}{\alpha}\frac{k^2}{D(k)}, \tag{30}$$

$$E_M(k) = \frac{4\pi}{\alpha\cos^2\phi}\frac{k^2}{D(k)}, \quad H_M(k) = -\frac{4\pi k_c}{\alpha\cos^2\phi}\frac{1}{D(k)}, \tag{31}$$

$$H_C(k) = -\frac{4\pi}{\alpha}\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}\frac{k^2}{D(k)}, \tag{32}$$

where $\sin\phi = \gamma/2\alpha$ $(-\frac{1}{2}\pi < \phi < \frac{1}{2}\pi)$, $k_c = \beta/\alpha\cos^2\phi$ and $D(k) = 1-(k_c/k)^2$. For the above calculations to be correct, the density ρ must be normalizable, i.e. the quadratic form $\alpha E_T+\beta H_M+\gamma H_C$ must be positive definite; this is easily seen to require $\alpha > 0$, $|\gamma| < 2\alpha$ and $D(k) > 0$, which implies that $|k_c| < k_{\min}$.

By integrating (30)–(32) over k from $k_{\min}$ to $k_{\max}$, it is possible to express the three fundamental invariants $\langle E_T\rangle$, $\langle H_C\rangle$ and $\langle H_M\rangle$ in terms of α, β, γ, $k_{\min}$ and $k_{\max}$ (see appendix). Conversely, given $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\langle E_T\rangle$, $\langle H_C\rangle$ and $\langle H_M\rangle$ satisfying realizability conditions, α, β and γ are uniquely determined but cannot be obtained in closed analytic form. As special cases of interest, notice that $\beta = 0$ is equivalent to $\langle H_M\rangle = 0$ and $\gamma = 0$ is equivalent to $\langle H_C\rangle = 0$.

If an ensemble of inviscid truncated MHD flows has a non-equilibrium initial distribution in phase space, it will relax, assuming the mixing property of the dynamical system (Wightman 1971), to the canonical ensemble (25) with α, β and γ depending only on the initial energy, cross-helicity and magnetic helicity and not on the initial kinetic helicity.

Let us now consider some of the implications of the equilibrium spectra (30)–(32). In the absence of mean magnetic helicity ($\beta = 0$), (30)–(32) give the classical $E(k) \sim k^2$ spectrum obtained by Lee (1952) with equipartition of magnetic and kinetic energy. When $\beta \neq 0$, there is still approximate equipartition ($E(k) \sim k^2$) for $k \gg |k_c|$, a result substantially different from the corresponding non-magnetic one (see § 1 (iii)). However, for values of k near $k_{\min}$ the situation may be quite different if

$$k_{\min} - |k_c| \ll |k_c|. \tag{33}$$

At this point it is convenient to consider separately the cases $\gamma = 0$ and $\gamma \neq 0$. When $\gamma = 0$ and (33) holds, there is near $k_{\min}$ a region of almost maximal helicity with very large values of $E_M(k)$ and $H_M(k)$; the mean total energy $\langle E_T\rangle$ in the interval $(k_{\min}, k_{\max})$ is made up essentially of magnetic energy and is related to the mean magnetic helicity $\langle H_M\rangle$ by

$$k_{\min}|\langle H_M\rangle| \simeq \langle E_T\rangle. \tag{34}$$

Since $k_{\min}|\langle H_M\rangle| \leqslant \langle E_T\rangle$ is a consequence of (15), these states with high magnetic excitation near $k_{\min}$ can also be defined as states of high magnetic helicity. For $\gamma \neq 0$, with (31) still holding, the correlations between **v** and **b** produce also a high magnetic excitation near $k_{\min}$ but the magnetic energy density near $k_{\min}$ still exceeds the kinetic energy density by a factor of order $1/\sin^2\phi$ and the ratio

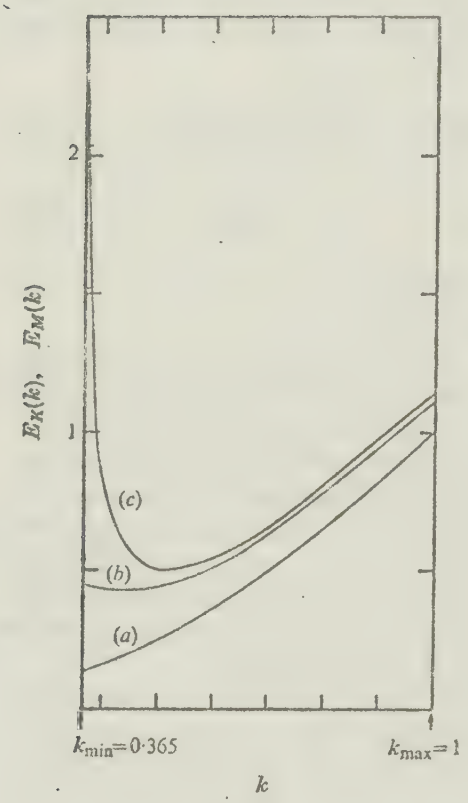


FIGURE 1

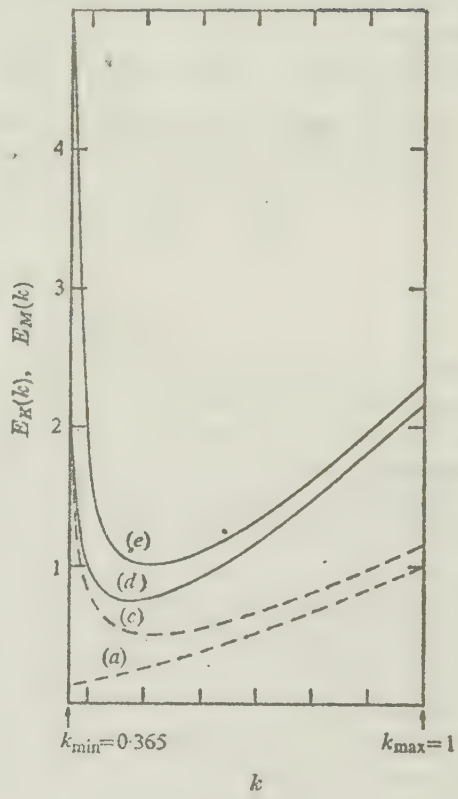


FIGURE 2

FIGURE 1. Energy densities: effect of magnetic helicity when $\langle H_C\rangle = 0$; $k_{min} = 0{\cdot}365$, $k_{max} = 1$, $\alpha = 4\pi$, $\phi = 0$; $\langle E_K\rangle \simeq 0{\cdot}32$. (*a*) Kinetic energy density for $k_c = 0$, 0·32 and 0·355 and magnetic energy density for $k_c = 0$; $\langle H_M\rangle = 0$, $\langle E_M\rangle \simeq 0{\cdot}32$. (*b*) Magnetic energy density for $k_c = 0{\cdot}32$; $\langle H_M\rangle \simeq -0{\cdot}30$, $\langle E_m\rangle \simeq 0{\cdot}41$, $k_{min}|\langle H_M\rangle|/\langle E_T\rangle \simeq 0{\cdot}15$. (*c*) Magnetic energy density for $k_c = 0{\cdot}355$; $\langle H_M\rangle \simeq -0{\cdot}45$, $\langle E_M\rangle \simeq 0{\cdot}47$, $k_{min}|\langle H_M\rangle|/\langle E_T\rangle \simeq 0{\cdot}21$.

FIGURE 2. Energy densities: effect of cross-helicity; $k_{min} = 0{\cdot}365$, $k_{max} = 1$, $\alpha = 4\pi$. (*a*), (*c*) As in figure 1. (*d*) Kinetic energy density and (*e*) magnetic energy density for $k_c = 0{\cdot}355$, $\phi = \frac{1}{4}\pi$; $\langle H_M\rangle \simeq -0{\cdot}9$, $\langle H_C\rangle \simeq -0{\cdot}67$, $\langle E_K\rangle \simeq 0{\cdot}79$, $\langle E_M\rangle \simeq 0{\cdot}95$, $k_{min}|\langle H_M\rangle|/\langle E_T\rangle \simeq 0{\cdot}19$, $2|\langle H_C\rangle|/\langle E_T\rangle \simeq 0{\cdot}77$.

$k_{min}\langle H_M\rangle/\langle E_T\rangle$ cannot exceed $(1+\sin^2\phi)^{-1}$. To illustrate the above results, we have plotted $E_K(k)$ and $E_M(k)$ for different values of the ratio $k_{min}\langle H_M\rangle/\langle E_T\rangle$ for $\gamma = 0$ in figure 1 and for two different values of γ in figure 2.

The situation described here is reminiscent of two-dimensional non-magnetic absolute equilibria (Kraichnan 1967). In both cases, there is the possibility of high excitation at low wavenumbers. The essential differences are that in the two-dimensional case the equilibria with high excitation near k_{min} have negative α, i.e. negative temperatures, and are low enstrophy states.

3. Magnetic helicity cascades in fully developed isotropic MHD turbulence

For MHD turbulent flows with statistical invariance under plane reflexions (no helicity) it is generally accepted that energy (kinetic + magnetic) cascades towards large wavenumbers. Following Kraichnan (1965), Kraichnan & Nagarajan (1967) and Orszag & Kruskal (1968), let us assume that there is a (local or semi-local) inertial range with an energy spectrum $E_T(k)$ and an energy transfer rate ϵ. What happens if magnetic helicity is injected at a constant rate η at some wavenumber in the inertial range? The case when cross-helicity is also injected will not be considered in this paper. Since magnetic helicity is conserved by the nonlinear interactions, a cascade process is expected. Contrary to the non-magnetic case (cf. §1(i)), we must now rule out an upward linear cascade of magnetic helicity to increasing wavenumbers of the form

$$H_M(k) \sim (\eta/\epsilon) E_T(k), \tag{35}$$

because such a cascade cannot be continued beyond the wavenumber $k \sim \epsilon/\eta$ where maximal magnetic helicity is reached. It is thus difficult to escape the conclusion that the presence of magnetic helicity must produce some important change in fully developed MHD turbulence.

Instead of an upward cascade, a possibility which must be seriously envisaged is that of an *inverse cascade* of magnetic helicity to small wavenumbers, which cannot be a linear cascade because it is not carried by an energy cascade. Furthermore, all the triple correlations appearing in the equation for the evolution of magnetic helicity involve the velocity field, and thus a purely magnetic and local cascade is impossible (R. H. Kraichnan, private communication). In fact, large-scale velocity fields will necessarily be generated by the Lorentz-force term in the Navier–Stokes equations; the inverse cascade then proceeds through the interaction of the velocity fields with the large-scale magnetic fields.

The results of §2, showing the possibility of high magnetic excitation at small wavenumbers, indicate that an inverse cascade of magnetic helicity accompanied by magnetic energy may indeed exist. It is true that the absolute-equilibrium ensembles are very far from the actual non-equilibrium state of turbulence. Nevertheless (Kraichnan 1973) their value may be in showing the directions in which the actual states may plausibly be expected to transfer excitation, since within any given wavenumber band the characteristic time for reaching absolute equilibrium is the same as the eddy turnover time. For two-dimensional non-magnetic turbulence, the prediction by the absolute-equilibrium ensembles of an inverse energy cascade has, in fact, been verified by numerical experiment (Lilly 1969). As an additional argument in favour of an inverse cascade (cf. Fjørtoft 1953), note that simultaneous up-transfer of total energy and magnetic helicity is impossible. Suppose that an initial state of maximal helicity is confined to two wavenumbers **p** and **q** ($p < q$), and let this excitation be entirely transferred to the wavenumber **k**. From the conservation of total energy and magnetic helicity we have

$$E_T(k) = E_T(p) + E_T(q), \tag{36}$$

$$H_M(k) = H_M(p) + H_M(q) = E_T(p)/p + E_T(q)/q. \tag{37}$$

This obviously violates (15) if $k > q$.

The invariance of magnetic helicity holds only under the assumption that $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ vanishes at infinity or (in the statistically homogeneous case) that the mean magnetic field vanishes. In the presence of a prescribed uniform magnetic field $\mathbf{b}_0$, the invariance of magnetic helicity disappears and so probably do the corresponding cascades. This should not be surprising, since it is known that large-scale magnetic fields differ very much from large-scale velocity fields in their effects: they cannot be suppressed by a Galilean transformation.

4. Concluding remarks

We have found new evidence that the absence of statistical symmetry in isotropic turbulent flows may be of interest in the MHD turbulence problem, possibly leading to the growth of magnetic energy and the appearance of large-scale magnetic fields, a question of considerable astrophysical interest.

It is tempting to compare our present approach with the approach of Steenbeck *et al.* (1966). There are two important differences: (i) Steenbeck *et al.* make use only of the linear Ohm's law, which incorporates the magnetic helicity invariant but no energy invariant, whereas our approach is based on the invariants of the full nonlinear equations; (ii) in the analysis of Steenbeck *et al.*, only kinetic helicity appears. As kinetic helicity is not conserved when nonlinear effects are included, the magnitude of the α-effect is modified (as analysed for example, by Moffatt 1970). Magnetic helicity is however conserved, and our theory includes explicit consideration of this constraint.

We are grateful to Dr R. H. Kraichnan for a very illuminating discussion and to the National Center of Atmospheric Research (Boulder, Colorado), where part of this work was done.

Appendix

The expressions for $\langle E_K \rangle$, $\langle E_M \rangle$, $\langle H_M \rangle$ and $\langle H_C \rangle$ in terms of α, β, γ, $k_{\max}$ and $k_{\min}$ are [from (30)–(32)]

$$\langle E_K \rangle = \frac{4\pi}{\alpha \cos^2\phi}\left(\frac{k_{\max}^3 - k_{\min}^3}{3} + k_c^2 I \sin^2\phi\right),$$

$$\langle E_M \rangle = \frac{4\pi}{\alpha \cos^2\phi}\left(\frac{k_{\max}^3 - k_{\min}^3}{3} + k_c^2 I\right),$$

$$\langle H_M \rangle = -\frac{4\pi}{\alpha \cos^2\phi} k_c I,$$

$$\langle H_C \rangle = -\frac{4\pi \sin\phi}{\alpha \cos^2\phi}\left(\frac{k_{\max}^3 - k_{\min}^3}{3} + k_c^2 I\right),$$

where $$I = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{D(k)} = k_{\max} - k_{\min} + \frac{k_c}{2}\log\frac{(k_{\max} - k_c)(k_{\min} + k_c)}{(k_{\max} + k_c)(k_{\min} - k_c)}.$$

Note added in proof. The prediction of an inverse cascade of magnetic helicity is now supported by (i) a direct numerical simulation of the MHD equations with 32^3 Fourier modes due to S. Patterson and A. Pouquet, which shows a transfer of magnetic excitation towards small wavenumbers, and (ii) the numerical integration of the spectral equations obtained from the eddy damped quasi-normal approximation, which yields an indefinite inverse cascade.

REFERENCES

Batchelor, G. K. 1950 *Proc. Roy. Soc.* A **201**, 405.

Betchov, R. 1961 *Phys. Fluids*, **4**, 925.

Brissaud, A., Frisch, U., Léorat, J., Lesieur, M. & Mazure, A. 1973 *Phys. Fluids*, **16**, 1366.

Elsässer, W. M. 1956 *Rev. Mod. Phys.* **28**, 135.

Fjørtoft, R. 1953 *Tellus*, **5**, 225.

Frisch, U., Lesieur, M. & Brissaud, A. 1974 *J. Fluid Mech.* **65**, 145.

Kraichnan, R. H. 1965 *Phys. Fluids*, **8**, 1385.

Kraichnan, R. H. 1967 *Phys. Fluids*, **10**, 1417.

Kraichnan, R. H. 1973 *J. Fluid Mech.* **59**, 745.

Kraichnan, R. H. & Nagarajan, S. 1967 *Phys. Fluids*, **10**, 859.

Lee, T. D. 1952 *Quart. Appl. Math.* **10**, 69.

Lesieur, M. 1973 Ph.D. thesis, University of Nice.

Lilly, D. 1969 *Phys. Fluids Suppl.* **12**, II 240.

Lumley, J. L. 1970 *Stochastic Tools in Turbulence*. Academic.

Moffatt, H. K. 1969 *J. Fluid Mech.* **35**, 117.

Moffatt, H. K. 1970 *J. Fluid Mech.* **44**, 705.

Moffatt, H. K. 1973 *J. Fluid Mech.* **57**, 625.

Orszag, S. A. & Kruskal, M. D. 1968 *Phys. Fluids*, **11**, 43.

Roberts, P. H. & Stix, M. 1971 *N.C.A.R. Tech. Note*, 1A–60.

Steenbeck, M., Krause, F. & Rädler, K.-H. 1966 *Z. Naturforsch.* **21***a*, 364.†

Wightman, A. S. 1971 *Statistical Mechanics at the Turn of the Decade* (ed. E. D. Cohen), pp. 1–29. Dekker.

Woltjer, L. 1958 *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **44**, 489.

† This and subsequent papers appear in translation in Roberts & Stix (1971).

REFERENCES

ACHESON, D.J. and HIDE, R. (1973), Hydromagnetics of rotating fluids, Reports Prog. Phys., 36, 159-221.

ANDRE, J.C. and LESIEUR, M. (1975), Evolution of high Reynolds number helical turbulence, Prépublication. Observatoire de Nice.

ANGEL, J.R.P., CARSWELL, R.F., STRITTMATTER, P.A., BEAVER, E.A. and HARMS, R. (1974), Discovery of a magnetic Da white dwarf, Ap. J. Letters, 194, L 47-50.

AUVERGNE, M., FRISCH, H., FRISCH, U., FROESCHLE, C., and POUQUET, A. (1973). Spectral line formation in a turbulent atmosphere : a unified theory, Astronomy ans Astrophysics, 29, 93.

BABCOCK, H.W. (1960), The 34-kilogauss magnetic field of HD 215441, Ap. J., 132, 521-531.

BABCOCK, H.W. (1961), The topology of the sun's magnetic field and the 22 year cycle, Ap. J., 133, 572-587.

BATCHELOR, G.K. (1950), On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion, Proc. Roy. Soc., A 201, 405.

BIERMAN, L. and SCHLUTER, A. (1951), Cosmic radiation and cosmic magnetic fields II. Origin of cosmic magnetic fields, Phys. Rev., 82, 863-868.

BETCHOV, R. (1961), Semi isotropic turbulence and helicoidal flows, Phys. Fluids, 4, 925.

BRISSAUD, A., FRISCH, U., LEORAT, J., LESIEUR, M., MAZURE, A., POUQUET, A., SADOURNY, R. and SULEM, P.L. (1973), Catastrophe énergétique et nature de la turbulence, Ann. Geophys., 29, 539. (En Appendice A_4).

BURTON, W.B. (1972), On the kinematic distribution of galactic neutral hydrogen, Astronomy and Astrophysics, 19, 51-65.

CHANDRASEKHAR, S. (1955), Hydromagnetic turbulence. I. A deductive theory, Proc. Roy. Soc. Lon., A 233, 322-330.

CHANDRASEKHAR, S. (1957), The partition of energy in hydromagnetic turbulence, Annals of Physics, 2 , 615-622.

CHAPMAN, G.A. (1974), On the nature of the small scale solar magnetic field, Ap. J., 191, 255-259.

DROBYSHEVSKI, E.M. and YUFEREV, V.S. (1974), Topological Pumping of magnetic flux by three dimensional convection, J. Fluid Mech., 65, 33-44.

EDWARDS, S.F. (1964), The theoretical dynamics of homogeneous turbulence, J. Fluid Mech., 18, 239.

ELSASSER, W.M. (1956), Hydromagnetic dynamo theory, Rev. Mod. Phys., 28, 135.

FRISCH, U., LEORAT, J., MAZURE, A. and POUQUET, A. (1975), Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in MHD turbulence, J. Fluid Mech., 68, 769. (En Appendice A_5)

FRISCH, U., LESIEUR, M. and BRISSAUD, A. (1974), A Markovian random coupling model for turbulence, J. Fluid Mech., 65, 145-152.

GARDNER, T.F., and DAVIES, R.D. (1965), Faraday Rotation of the emission from linearly polarized radio-sources, Australian Journal of Physics, 19, 129-139.

GORZ, A. (1974), Caractères de classe de la science et des travailleurs scientifiques. Les Temps Modernes, février 1974, 1159-1177.

GRANT, H.L., STEWART, R.W. and MOILLIET, A. (1962), Turbulence spectra from a tidal channel, J. Fluid Mech., 12, 241.

GUBBINS, D. (1974), Theories of the geomagnetic and solar dynamos, Rev. of Geophysics and Space Physics, 12, 137-154.

HARVEY, J. (1971, Solar magnetic fields - Small scale, Pub. Astron. Soc. Pacific, 83, 539.

HERRING, J. (1965), Self consistent-field approach to turbulence theory, Phys. Fluids, 8, 2219.

HERRING, J.R. and KRAICHNAN, R.H. (1972), Comparison of some approximations for isotropic turbulence in "Statistical models and Turbulence", P. 148, Springer Verlag.

HIDE, R. (1969), Interaction between the Earth's liquid core and solid mantle, Nature, 222, 1055-1056.

HUBBARD, W.B. and SMOLUCHOWSKI, R. (1973), Structure of Jupiter and Saturn, Space Science Reviews, 14, 599-662.

JOKIPII, J.R., LERCHE, I. and SCHOMMER, R.A. (1969), Interstellar polarization of starlight and the turbulent structure of the galaxy, Ap. J., 157, L 119-124.

KAPLAN, S.A. and PIKELNER, S.B. (1970), The interstellar medium, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

KATO, T. (1972), Non stationnary flows of viscous and ideal fluids in R^3, J. Funct. Anal., 9, 296.

KELLERMAN, K.I. (1974), Radiogalaxies & quasars in "Galactic and Extra-Galactic Radio Astronomy", G.L. Verschuur and K.I. Kellerman Ed., Springer Verlag.

KOLMOGOROV, A.N. (1941), The local structure in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, C.R. Acad. Sci. URSS, 30, 301.

KRAICHNAN, R.H. (1958), Irreversible statistical mechanics of incompressible hydromagnetic turbulence, Phys., Rev., 109, 1407.

KRAICHNAN, R.H. (1959), The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, J. Fluid Mech., 5, 497-543.

KRAICHNAN, R.H. (1961), Dynamics of non linear stochastic systems, J. Math. Phys., 2, 124.

KRAICHNAN, R.H. (1965a), Lagrangian history closure approximation turbulence, Phys. Fluids, 8, 575.

KRAICHNAN, R.H. (1965b), Inertial range spectrum of hydromagnetic turbulence, Phys. Fluids, 8, 1385.

KRAICHNAN, R.H. and NAGARAJAN, S. (1967), Growth of turbulent magnetic fields, Phys. Fluids, 10, 859.

KRAICHNAN, R.H. (1971a), An Almost-Makovian Galilean-invariant turbulence model, J. Fluid Mech., 47, 513.

KRAICHNAN, R.H. (1971b), Inertial-range transfer in two-and three-dimensional turbulence, J. Fluid. Mech., 47, 525-535.

KRAICHNAN, R.H. (1973), Helical turbulence and absolute equilibrium, J. Fluid. Mech., 59, 745-752.

LEE, T.D. (1952), On some statistical properties of hydrodynamical and magneto-hydrodynamical fields, Quart. Appl. Math., 10, 69-74.

LEITH, C.E. (1971), Atmospheric predictability and two dimensional turbulence, Journal of the Atmospheric Sciences, 28, 145-161.

LESIEUR, M., FRISCH, U., BRISSAUD, A. (1971), Théorie de Kraichnan de la turbulence. Application à l'étude d'une turbulence possédant de l'hélicité. Ann. Géophys., 27, 151-165.

LESIEUR, M. (1973), Contribution à l'étude de quelques problèmes en turbulence pleinement développée, Thèse, Université de Nice.

LESLIE, D.C. (1973), Review of developments in turbulence theory, Rep. Prog. Phys., 36, 1365-1424.

LIONS, J.L. (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier-Villars, Paris.

LUMLEY, J.L. (1970), Stochastic tools in turbulence, Academic Press.

Mac DONOUGH, T.R. (1974), Jupiter after Pionneer : a progress report, Nature, 251, 17-20.

MALKUS, W.V.R. (1968), Precession of the earth as the cause of geomagnetism, Science, 160, 259-264.

MANCHESTER, R.N. (1974), Structure of the local galactic magnetic field, Ap. J., 188, 637-644.

MATHEWSON, D.S., FORD, V.L. (1970), The magnetic field structure of the Magellanic Clouds, Ap. J. Letters, 160, L43-46.

MATHEWSON, D.S., VAN DER KRUIT, P.C. and BROUW, W.N. (1972), A high resolution radio continuum survey of M51 and NGC 5195 at 1415 MHz, Astronomy and Astrophysics, 17, 468-486.

MESTEL, L. (1965), Problems of star formation I, Quart. J. Roy. Soc., Astronom. Soc., 6, 161-198.

MICHEL, E.C. and YAHIL, A. (1973), Galactic magnetic fields : cellular or filamentary structure, Ap. J., 179, 771-780.

MITTON, S. (1972), The polarization properties of 65 extragalactic sources in the 3C catalogue, Monthly Notices Roy. Astronom. Soc., 155, 373.

MOFFATT, H.K. (1969), The degree of knottedness of tangled vortex lines J. Fluid Mech., 35, 117-129.

MOFFATT, H.K. (1970a), Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number, J. Fluid Mech., 41, 435-452.

MOFFATT, H.K. (1970b), Dynamo action associated with random inertial waves in a rotating conducting fluid, J. Fluid. Mech., 44, 705-719.

MOFFATT, H.K. (1974), The mean electromotive force generated by turbulence in the limit of perfect conductivity, J. Fluid Mech., 65, 1-10.

MOORE, D. (1967), Convective overshoot, dans Aerodynamic Phenomena in stellar Atmospheres R. Thomas ed. Symp. I.A.U. n° 28, p. 405-427.

NAGARAJAN, S. (1969), Turbulent Magnetic Fields II. Steady state spectra, Rapport Matscience, the Institute of mathematical sciences, Madras-20, Inde.

NAGARAJAN, S. (1970), Evolution of turbulent magnetic fields. Approach to a steady state, in IAU Trans. n° 43, 487-504.

NOEL, M. and TARLING, D.M. (1975), The Laschamp geomagnetic "event", Nature, 253, 705-707.

ORSZAG, S.A. (1970), Analytical theories of turbulence, J. Fluid Mech., 41, 363-386.

ORSZAG, S.A. (1974), Lectures on the statistical theory of turbulence, Flow Research Report n° 31, Flow Research Inc. A paraître dans Ecole d'été des Houches, 1973.

PACINI, F. (1968), Rotating neutron stars, pulsars and sypernorme remnants, Nature, 219, 145-146.

PARKER, E.N. (1955), Hydromagnetic dynamo models, Ap. J., 122, 293.

PARKER, E.N. (1969), Origin of the magnetic field of the galaxy, Ap. J., 157, 1129.

PARKER, E.N. The generation of magnetic fields in astrophysical bodies.

I. The dynamo equations, Ap. J., 162 (1970), 665-673.

II. The galactic field, Ap. J., 163, (1971), 255-278.

III. Turbulent diffusion of fields and efficient dynamos, Ap. J., 163 (1971), 279-285.

IV. The solar and terrestial dynamo, Ap. J., 164 (1971), 491-509.

V. Behavior at large dynamo numbers, Ap. J., 165 (1971), 139-146.

VI. Periodic modes of the galactic field, Ap. J., 166, (1971), 295-300.

VII. Dynamical considerations, Ap. J., 168, (1971), 239-249.

PARKER, E.N. (1972), Topological dissipation and the small scale fields in turbulent gases, Ap. J., 174, 499-510.

PENEL, P. (1975), Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la théorie de la turbulence. Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay.

PIDDINGTON, J.H. (1972), The origin and form of the galactic magnetic field, Cosmic Electrodynamics, 3, 60-70.

PIDDINGTON, J.H. (1973), Dynamo theories of the solar and galactic magnetic fields, Astrophysics and Space Science, 24, 259-267.

POUQUET, A., LESIEUR, M., ANDRE, J.C. et BASDEVANT, C., (1975), Evolution of high Reynolds number two dimensional turbulence, soumis à J. Fluid Mech.

POUQUET, A., PATTERSON, G.S., (1975), Numerical simulation of MHD turbulence, soumis à J. Fluid Mech.

PRESTON, G.W. (1967), dans The Magnetic and Related Stars, ed. R.C. Cameron (Baltimore : Mono Book Corp).

PROUDMAN, I. and REID, W.H. (1954), On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field, Phil. Trans. Roy. Soc. Lon., A247, 163-189.

ROBERTS, P.H. and TATSUMI, T. (1960), J. Math Mech, 9, 967.

ROBERTS, P.H. (1967), An introduction to magnetohydrodynamics, Longmans.

ROBERTS, P.H., (1971), Dynamo theory, Mathematical Problems in the geophysical Sciences, ed. W.H. Reid, 129-206, American Math. Soc., Providence.

ROBERTS, P.H. and STIX, M. (1971), The turbulent dynamo. A translation of a series of papers by F. Krause, K.H. Rädler, M. Steenbeck, N.C.A.R. Tech. Note, IA-60 (Boulder, Colorado).

ROBERTS, P.H., et SOWARD (1975), On first order smoothing theory, J. Math. Phys., 16, 609-615.

RUNKORN (1975), An ancient lunar magnetic dipole field, Nature, 253, 701-703.

SCHATZMAN, E. (1962), A theory of the role of magnetic activity during star formation, Annales d'Astrophysique, 25, 18-29.

SMOLUCHOWSKI, R. (1967), Internal structure and energy emission of Jupiter, Nature, 215, 691-695.

STEENBECK, M., KRAUSE, F. and RADLER, K.H. (1966), Berechnung der mittlerenlorentz-Feddstärke $\vec{v} \wedge \vec{B}$ furein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte bleinflusster Bewegung. Z. Naturforsch, 21a, 369-376 (traduction anglaise dans Roberts and Stix, 1971).

TATSUMI, T. (1960), Magneto fluid dynamic turbulence, Rev. of Mod. Physics, 32 , 807.

VAINSHTEIN, S.I. and ZEL'DOVICH, Y.B. (1972), Origin of magnetic fields in astrophysics, Sov. Phys. Uspekhi, 15, 159.

VAINSHTEIN, S.I. (1972), Non linear problem of the turbulent dynamo, Sov. Phys. JETP, 34, 327-331.

VAINSHTEIN, S.I. (1974), "Antidynamo" - A possible mechanism of phenomena occuring in neutral layers of a magnetic field, Sov. Phys. JETP, 38, 270.

VERHOOGEN (1974), Chandler wobble and viscosity in the Earth's core, Nature, 249, 334-335.

VERSCHUUR, G.L., and KELLERMAN, K.I. (1974), Galactic and extra-galactic radio astronomy, Springer Verlag.

WOLTJER, L., (1958), On hydromagnetic equilibrium, Proc. Nat.Acad. Sci., USA, 44, 833-841.

WORRAL, G. ans WILSON, A. (1972), Can astrophysical abundances be taken seriously ? Nature, 236, 15-18.